

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Nikola Grubešić

ZAGREB, 2013.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Nikola Grubešić

ZAGREB, 2013.

ZAVRŠNI RAD

IZJAVA

Izjavljujem pod moralnom, materijalnom i krivičnom odgovornošću da sam završni rad na temu „Uloga inferencijalne statistike u poboljšanju proizvodnih procesa“ radio samostalno koristeći literaturu koju mi je dao mentor te koristeći literaturne izvore koje samostalno pronašao.

Prilikom izrade završnog rada također sam koristio znanja i iskustva stečena tijekom studija.

(Nikola Grubešić)

ZAHVALA

Zahvaljujem se roditeljima, sestrama i kolegama na velikoj pomoći, povjerenju i strpljenju koje su mi ukazali tijekom studija kao i prilikom pisanja završnog rada.

Posebno se zahvaljujem mentoru **doc. dr. sc. Hrvoju Cajneru** te **prof. dr. sc. Nedjeljku Štefaniću** koji su mi svojim dragocjenim prijedlozima, savjetima i sugestijama omogućili da uspješno završim ovaj rad.

POPIS OZNAKA	I
POPIS SLIKA	II
POPIS TABLICA	III

Sadržaj

1. Uvod.....	1
2. Sistematizacija metoda inferencijalne statistike.....	2
2.1. Teorija uzoraka.....	3
2.2. Nepristrane procjene parametra osnovnog skupa.....	5
2.2.1. Varijanca procjenitelja parametra	5
2.2.2. Standardna pogreška procjenitelja parametra	6
2.3. Pristrane procjene parametara osnovnog skupa	7
2.3.1. Srednji kvadrat odstupanja procjenitelja parametra.....	7
2.4. Metode procjenjivanja parametara	8
2.4.1. Metoda momenata.....	9
2.4.2. Metoda najveće vjerodostojnosti	10
2.5. Intervalne procjene parametara	11
2.5.1. Interval vjerodostojnosti – razvoj i osnovna svojstva.....	11
2.5.2. Određivanje veličine uzorka	13
2.5.3. Intervalna procjena očekivanja osnovnog skupa	13
2.5.3.1 Intervalna procjena očekivanja osnovnog skupa na velikom uzorku	13
2.5.3.2 Studentova t- razdioba	14
2.5.4. Intervalna procjena varijance osnovnog skupa	17
2.5.5. Intervalna procjena proporcija	18
2.5.6. Intervalna procjena za buduća promatranja	19
2.6. Testiranje hipoteza	20
2.6.1. Testiranje statističkih hipoteza.....	20

2.6.2	Testiranje hipoteza na jednom uzorku	21
2.6.2.1.	Testiranje hipoteze o očekivanju osnovnog skupa sa poznatom varijancom .	21
2.6.2.2.	Testiranje hipoteze o očekivanju osnovnog skupa sa nepoznatom varijancom ..	23
2.6.2.3.	Testiranje hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti varijance osnovnog skupa ...	24
2.7.	Usporedba parametara osnovnih skupova	26
2.7.1	Test hipoteza o razlici očekivanja dvaju osnovnih skupova nezavisnim uzorcima ...	26
2.7.2	Usporedba varijanci dvaju osnovnih skupova.....	27
2.7.3.	Testiranje značajnosti razlike stvarnih i teorijskih frekvencija	29
2.7.4.	Test Kolmogorov – Smirnova	30
2.7.5.	Shapiro – Wilk test.....	31
2.8.	Linearna korelacija	32
2.9.	Regresija.....	34
2.9.1	Jednostavna linearna regresija	35
2.9.2	Model višestruke linearne regresije	36
2.10.	Analiza varijance – ANOVA.....	37
2.10.1	ANOVA s jednim utjecajnim faktorom	37
2.10.2.	ANOVA s dva utjecajna faktora	40
3.	Primjena nekih spomenutih metoda inferencijalne statistike na realnim primjerima te tumačenje dobivenih rezultata.....	42
3.1.	Primjer 1- testiranje adekvatnosti modela uporabom testova na ostacima (rezidualnim vrijednostima).....	42
3.2.	Primjer 2 - regresijska analiza:	46
3.2.1	Korelacijska i regresijska analiza predviđenih rezultata:	46
3.2.2	Korelacija i regresijska analiza izmjerenih rezultata:.....	48
3.3.	Primjer 3 - uporaba analize varijance s 2 promjenjiva faktora.....	50
3.4.	Primjer 4 - analiza varijance u analizi utjecaja na trošenje reznih pločica s zaštitnim prevlakama	54
3.4.1.	Testiranje vremena trajanja alata „t“	54

3.4.2. Testiranje vrijednosti trošenja alata <i>VB</i>	56
3.5. Primjer 5 - uporaba statističkih metoda pri poboljšavanju regresijskog modela	58
3.5.1 Regresijski model za vlačnu čvrstoću <i>Rm</i>	58
3.5.2. Regresijski model za savojnu čvrstoću <i>Rmf</i>	61
4. Zaključak	67
5. Literatura:	68

POPIS OZNAKA

OZNAKA	JEDINICA	OPIS
a		Regresijski koeficijent
b		Slobodni član u regresijskoj funkciji
d_i	MPa	Izmjerene vrijednosti vlačne čvrstoće
e_i		Apsolutne očekivane frekvencije
H_0		Nulta hipoteza
H_1		Alternativna hipoteza
HB	HB	Tvrdoća po Brinelu
f_i		Apsolutne empirijske frekvencije
F		parametar F razdiobe
g		Broj parametara procijenjene razdiobe
k		Broj stupnjeva slobode
l		Donja granica intervala vjerodostojnosti
n		Veličina uzorka
O_i	MPa	Predviđene vrijednosti vlačne čvrstoće
r		Koeficijent korelacije
r^2		Koeficijent determinacije
P		Proporcija osnovnog skupa
R		Omjer opterećenja
R_m	MPa	Vlačna čvrstoća
R_{mf}	MPa	Savojna čvrstoća
s		Nepristrana procjena standardne devijacije
s^2		Nepristrana procjena varijance
s_p		Nepristrana procjena standardne pogreške proporcije uzorka
$s_{\bar{x}}$		Standardna pogreška aritmetičke sredine
$s_{\hat{\Theta}}$		Procijenjena standardna greška procjenitelja $\hat{\Theta}$
SKO		Suma kvadrata odstupanja
t		Oznaka Studentove t-razdiobe
t	min	Vrijeme trajanja alata

OZNAKA	JEDINICA	OPIS
$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$		kritična vrijednost parametra t-razdiobe uz određenu vjerojatnost
u		Gornja granica intervala vjerodostojnosti
u_i		Rezidualno odstupanje u regresijskom modelu
VB	mm	Vrijednost trošenja stražnje površine alata
$V_{\hat{y}}$		Koeficijent varijacije regresije
W		Test veličina Shapiro – Wilk testa
$x_1, x_2, \dots x_n$		Vrijednosti slučajnog uzorka
x_{ij}		Vrijednost u i-tom retku i j-tom stupcu
\bar{X}		Aritmetička sredina uzorka
z		Parametar jedinične normalne razdiobe
$z_{\alpha/2}$		Kritična vrijednost parametra jedinične normalne razdiobe uz određenu vjerojatnost
$(1-\alpha)$		Razina vjerodostojnosti
β		Ostatak na y osi osnovnog skupa
ΔK_c	$MPa\sqrt{m}$	Granična lomna žilavost materijala
ΔK_{th}	$MPa\sqrt{m}$	Granična vrijednost raspona koeficijenta intenzivnosti naprezanja
$\Delta \bar{x}_i$		Doprinos aritmetičke sredine i-tog stupca
$\Delta \bar{x}_j$		Doprinos aritmetičke sredine j-tog stupca
ε		Pogreška procjene
ε_{ij}		Slučajno odstupanje unutar uzorka
$\hat{\Theta}$		Nepristrani procjenitelj
θ		Parametar osnovnog skupa
$\hat{\mu}$		Procijenjeno očekivanje osnovnog skupa
ρ		Koeficijent korelacije osnovnog skupa
σ		Standardna devijacija uzorka
σ_0		Standardna devijacija osnovnog skupa
$\sigma_{\bar{X}}$		Standardna greška aritmetičke sredine uzorka \bar{X}
$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$		Standardna pogreška razlike aritmetičkih sredina uzoraka

		Standardna devijacija regresije
$\sigma_{\hat{y}_i}$		
OZNAKA	JEDINICA	OPIS
σ_0^2		Varijanca osnovnog skupa
$\sigma_{\hat{y}_i}^2$		Varijanca regresije
χ^2		varijabla hi-kvadrat razdiobe
$\chi_{\alpha/2, n-1}^2$		varijabla hi-kvadrat razdiobe uz određenu vjerodostojnosti

POPIS SLIKA

Slika 1. Slika osnovnog skupa i uzoraka.....	4
Slika 2. Distribucije dvaju nepristranih procjenitelja [1]	5
Slika 3. Dva procjenitelja s različitim parametrima razdiobe [2].....	8
Slika 4. Funkcija gustoće vjerojatnosti t - razdiobe sa različitim parametrima [2].....	16
Slika 5. Koeficijenti vjerodostojnosti t razdiobe [2]	16
Slika 6. Funkcija gustoće vjerojatnosti hi - kvadrat razdiobe s nekoliko različitih parametara [2].....	17
Slika 7. Koeficijent vjerodostojnosti hi - kvadrat razdiobe [2]	18
Slika 8. Grafički prikaz područja prihvatanja i odbacivanja hipoteze H_0	20
Slika 9. Prikaz područja prihvatanja i odbijanja hipoteze H_0 u slučaju test – veličine „ z “ [2]	22
Slika 10. Prikaz područja prihvatanja i odbijanja hipoteze H_0 u slučaju test – veličine „ t “ [2].....	23
Slika 11. Prikaz područja prihvatanja i odbijanja hipoteze H_0 u slučaju test – veličine „ χ^2 “ [2].....	25
Slika 12. Funkcija gustoće vjerojatnosti F razdiobe sa nekoliko različitih parametara [2].....	27
Slika 13. Prikaz donje i gornje granice intervala vjerodostojnosti F razdiobe [2]	27
Slika 14. Funkcija distribucije vjerojatnosti normalne raspodjele	31
Slika 15. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe a) sa svim vrijednostima i b) bez ekstrema..	43
Slika 16. Koeficijenti korelacije i determinacije – predviđeni i izmjereni R_m - svi rezultati ...	44
Slika 17. Tablični prikaz podataka regresijske analize predviđenih i izmjerenih R_m –svi rezultati.....	44
Slika 18. Graf linearne regresije predviđenih i izmjerenih R_m - svi rezultati.....	44
Slika 19. Koeficijenti korelacije i determinacije – predviđeni i izmjereni R_m - bez ekstrema .	45
Slika 20. Tablični prikaz podataka regresijske analize predviđenih i izmjerenih R_m –bez ekstrema	45
Slika 21. Graf linearne regresije predviđenih i izmjerenih R_m - bez ekstrema.....	45
Slika 22. Koeficijenti korelacije i determinacije R_m i HB – predviđeni rezultati.....	47
Slika 23. Tablični prikaz podataka regresijske analize R_m i HB - predviđeni rezultati.....	47
Slika 24. Graf linearne regresije R_m i HB – predviđeni rezultati.....	48
Slika 25. Koeficijenti korelacije i determinacije R_m i HB – izmjereni rezultati.....	48
Slika 26. Tablični prikaz podataka regresijske analize R_m i HB - izmjereni rezultati.....	49
Slika 27. Graf linearne regresije R_m i HB – izmjereni rezultati.....	49
Slika 28. Dimenzije testne epruvete	50
Slika 29. Tablični prikaz rezultata ANOVA-e	51
Slika 30. „Box – whisker“ prikaz ovisnosti ΔK_{th} o promjenjivim faktorima	52

Slika 31. Tablični prikaz rezultata ANOVA-e	53
Slika 32. „Box – whisker“ prikaz ovisnosti ΔKc o promjenjivim faktorima.....	54
Slika 33. Tablični prikaz rezultata ANOVA-e	55
Slika 34. „Box – whisker“ prikaz ovisnosti vremena trajanja alata „t“ o promjenjivim faktorima	56
Slika 35. Tablični prikaz rezultata ANOVA	57
Slika 36. „Box – whisker“ prikaz ovisnosti trošenja alata VB o promjenjivim faktorima	57
Slika 37. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka originalnog modela, R_m	59
Slika 38. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih reziduala poboljšanog modela, R_m ..	60
Slika 39. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka originalnog modela, R_{mf}	62
Slika 40. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka poboljšanog modela, R_{mf} ...	64
Slika 41. Prikaz rezultata t - testa i F – testa	65
Slika 42. „Box – whisker „ prikaz rezultata uzorka 1 i 2	66

POPIS TABLICA

Tablica 1. Načina odlučivanja u statističkoj hipotezi [1]	21
Tablica 2. Način donošenja odluke [1].....	22
Tablica 3. Način odlučivanja [1]	24
Tablica 4. Način odlučivanja o pretpostavljenoj vrijednosti varijance[1]	25
Tablica 5. Način odlučivanja [1]	26
Tablica 6. Tablica odlučivanja [1].....	28
Tablica 7. Prikaz podataka za ANOVU [4].....	38
Tablica 8. ANOVA s jednim utjecajnim faktorom [4].....	39
Tablica 9. ANOVA s dva utjecajna faktora [4].....	41
Tablica 10. Predviđene i izmjerene vrijednosti R_m i ostaci	42
Tablica 11., Predviđene vrijednosti R_m i HB Tablica 12. Izmjerene vrijednosti R_m i HB ...	46
Tablica 13. Izmjerene vrijednosti ΔK_{th} , u MPam	51
Tablica 14. Izmjerene vrijednosti ΔK_c , u MPam	53
Tablica 15. Vrijeme trajanja alata t, min	54
Tablica 16. Trošenje stražnje površine VB, mm	56
Tablica 17. Originalni regresijski model R_m	59
Tablica 18. Poboljšani regresijski model R_m	60
Tablica 19. Originalni regresijski model R_{mf}	62
Tablica 20. Poboljšani regresijski model R_{mf}	63
Tablica 21. Promjer d čelične spajalice, mm	65

1. Uvod

Statistika je grana primijenjene matematike koja se bavi analizom podataka. Metodu koja se bavi prikupljanjem, analizom i tumačenjem podataka različite vrste, gdje podatke možemo definirati kao kvalitativna i kvantitativna svojstva elemenata statističkih skupova i podskupa nazivamo *statistička metoda*. Razlikuju se *deskriptivne* i *inferencijalne* statističke metode.

Deskriptivna statistika bazira se na potpunom statističkom skupu. Istraživanja primjenom deskriptivne statistike obuhvaćaju čitav osnovni skup i često zahtijevaju mnogo vremena kao i velike troškove. *Inferencijalna statistika* bazira se na dijelu (uzorku) jedinica odabranih iz osnovnog skupa, pomoću kojeg se uz primjenu odgovarajućih statističkih metoda i tehnika donose zaključci o čitavom osnovnom skupu. [1] U ovom radu bit će primjenjivana *metoda inferencijalne statistike*.

Metoda inferencijalne statistike je bazirana na teoriji uzoraka i uzima u obzir pogrešku koja se događa prilikom zaključivanja o parametrima osnovnog skupa na temelju uzorka. Budući da se proizvodni proces ne može u cijelosti obuhvatiti statističkom analizom, teorijom uzoraka izuzima se uzorak koji reprezentativno opisuje proizvodni proces. Primjenom metoda inferencijalne statistike na uzorku može se doći do kvalitetnih procjena parametara osnovnog skupa, odnosno proizvodnih procesa.

U radu se daje pregled najčešćih vidova uporabe metoda inferencijalne statistike vezanih uz probleme proizvodnih sustava. U drugom dijelu rada je sistematizacija metoda inferencijalne statistike koje se koriste u procesu analize uzorka i koje se primjenjuju u svrhu poboljšanja proizvodnog procesa, dok se u sljedećem dijelu rada prezentiraju aplikacije statističkih metoda inferencijalne statistike na realnim primjerima te tumačenje dobivenih rezultata.

2. Sistematizacija metoda inferencijalne statistike

Metode inferencijalne statistike najčešće su upotrebljavane u kontroli kvalitete proizvoda odnosno procesa te u poboljšanju tehnoloških postupaka.

Na današnjem tržištu proizvoda pojam „kvalitetan“ jedan je od najtraženijih atributa proizvoda koji pretpostavlja ispunjavanje svih postavljenih tehničkih zahtjeva za proizvod. Upravo zato kontrola kvalitete igra važnu ulogu u mnogim proizvodnim postrojenjima. Najznačajnija mjera kvalitete u užem smislu je veličina rasipanja σ značajke procesa (proizvoda). Možemo reći kako je **σ mjera kvalitete**. Najočitiiji pokazatelj poboljšavanja kvalitete procesa, odnosno proizvoda jest **stalno smanjivanje rasipanja**.

Za uspješno provođenje kontrole kvalitete potrebno je ispuniti određene pretpostavke [3]:

- Razumjeti statističke metode koje se koriste u statističkim procedurama kontrole kvalitete; metoda uzorkovanja, procjene parametara osnovnog skupa, testiranje hipoteza, korelacija i regresija, analiza varijance
- Razumjeti svrhu i ciljeve primjene tih metoda
- Poznavati mjerne i kontrolne postupke koji se koriste u procesima

Iz temeljnih pretpostavki za uspješno provođenje kontrole kvalitete vidimo kako suvremena kontrola kvalitete danas zahtijeva izvršitelje koje *posjeduju znanja i metode inferencijalne statistike* jer je primjena istih neizostavna u procesu kontrole kvalitete, odnosno poboljšanja kvalitete nekog proizvodnog procesa.

Princip suvremene kontrole kvalitete koncentrira se na elemente procesa, odnosno na promatranju reprezentativnog uzorka nekog proizvodnog procesa i kvalitetnoj interpretaciji dobivenih rezultata.

Metode inferencijalne statistike koriste se i u „Six sigma“ metodologiji. „Six sigma“ je unaprjeđenje proizvodnog procesa zasnovano na pronalasku i eliminaciji grešaka i uzroka pojave grešaka ili defekata u procesu. Cilj „Six sigma“ metodologije je smanjenje rasipanja procesa. Inferencijalna statistika se koristi u „Six sigma“ metodologiji u pogledu definiranja, mjerenja i analize proizvodnih procesa.

2.1. Teorija uzoraka

Da bi se provelo kvalitetno ispitivanje određene pojave, neophodno je što kvalitetnije prikupljanje informacija (podataka) o toj pojavi. Populacija (osnovni skup) predstavlja skup svih jedinki s određenim zajedničkim karakteristikama. Populacija može biti konačna ili beskonačna. Pogodnim izuzimanjem iz osnovnog skupa i analiziranjem izuzetih izradaka dobiju se rezultati promatranja koje treba generalizirati na populaciju, pri čemu koristimo *teoriju uzoraka*.

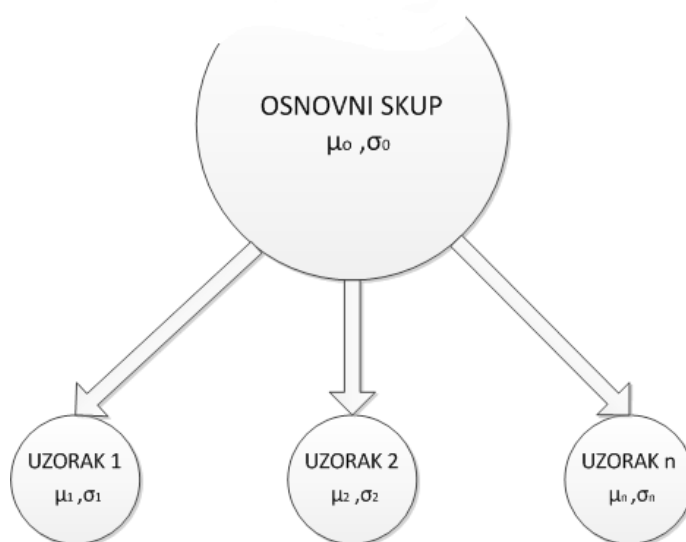
Pomoću podataka iz uzorka zaključuje se o svojstvima elemenata statističkog skupa. Zaključci o osobitostima skupa temelje se na podacima o dijelu jedinica, stoga sadrže pogrešku koja se naziva pogreškom nastalom zbog primjene uzorka (eng. *sampling error*), stoga je poželjno ukoliko je to moguće, istraživanjem obuhvatiti sve jedinice statističkog skupa jer se na taj način dolazi do pokazatelja koji ne sadrže pogrešku navedenog izvora. Postoje ipak faktori koji uvjetuju primjenu metode uzorka u ispitivanju pojava [1]:

- kada konačni statistički skupovi sadrže golem broj jedinica te je provedba statističkog istraživanja takvih skupova vrlo skupa, a istraživanje pomoću uzorka zahtijeva manja financijska sredstva
- do rezultata na osnovi podataka za sve jedinice dolazi sa vremenskim zakašnjenjem što može negativno djelovati na njihovu uporabnu vrijednost, pomoću uzorka se u kraćem vremenu dolazi do traženih informacija
- pojedina istraživanja zahtijevaju vrlo stručno osoblje i potrebnu opremu, s obzirom na to da uzorak sadrži manji broj jedinica omogućuje provedbu zamršenijih i opsežnijih istraživanja
- pomoću uzorka smanjuje se opseg rada te se tako postiže veći stupanj točnosti podataka za razliku od iscrpnog promatranja
- metoda uzorka rabi se u situacijama kada postoji mogućnost uništenja elemenata skupa u procesu ispitivanja
- istraživanje beskonačnih skupova moguće je samo pomoću uzorka

Zadaci metode uzoraka su procjenjivanje nepoznatih parametara, gdje parametar predstavlja funkciju svih vrijednosti osnovnog skupa (populacije), te ispitivanje pretpostavki o parametrima, odnosno o osobitostima jedne ili više populacija. Statistička pretpostavka je

tvrdnja o veličini parametra ili o obliku distribucije populacije čija se vjerodostojnost ispituje pomoću uzorka. Postupci i pravila kojima se dolazi do odluke o prihvatanju ili odbacivanju tvrdnje na temelju podataka iz uzorka čine područje ispitivanja hipoteze. Uzorak će biti reprezentativan ako svojim osobinama nalikuje skupu iz kojeg je izabran, a to se postiže ispravnim postavljanjem *plana uzorka*.

Kad god je moguće poželjno je izabrati *slučajni uzorak*. U takvom uzorku svaka jedinica populacije (osnovnog skupa) ima jednaku vjerojatnost da bude izabrana. Ukoliko neki članovi populacije imaju veću šansu od drugih da budu izabrani, takav uzorak naziva se *pristrani uzorak* i promatranjem takvog uzorka ne mogu dobro procijeniti parametri osnovnog skupa. [1]



Slika 1. Slika osnovnog skupa i uzoraka

2.2 Nepristrane procjene parametra osnovnog skupa

Procjenitelj bi trebao biti što „bliže“ pravoj vrijednosti nepoznatog parametra. Zato kažemo da je $\hat{\Theta}$ **nepristrani procjenitelj** θ ako je očekivana vrijednost $\hat{\Theta}$ jednaka vrijednosti θ . Procjenitelj $\hat{\Theta}$ parametra θ je nepristran (eng. *unbiased*) ako je njegova očekivana vrijednost jednaka parametru koji se procjenjuje, to jest ako je

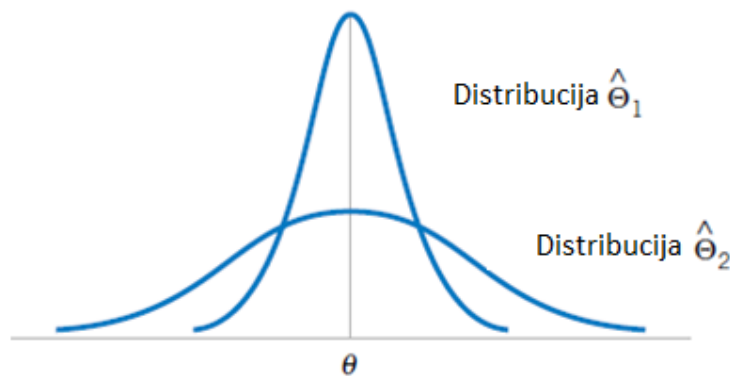
$$E(\hat{\Theta}) = \theta \quad (2.1.)$$

Ako je $\hat{\Theta}$ pristrani procjenitelj parametra θ , tada je veličina pristranosti (BIAS) :

$$BIAS = E(\hat{\Theta}) - \theta \quad (2.2.)$$

2.2.1. Varijanca procjenitelja parametra

Pretpostavimo da su $\hat{\Theta}_1$ i $\hat{\Theta}_2$ nepristrani procjenitelji parametra θ ; to nam upućuje da je očekivanje svakog od procjenitelja centrirano na pravoj vrijednosti parametra θ . Međutim varijance distribucije dvaju procjenitelja mogu biti različite



Slika 2. Distribucije dvaju nepristranih procjenitelja [1]

Opisanu situaciju ilustrira Slika 2. Budući da procjenitelj $\hat{\Theta}_1$ ima manju varijancu od procjenitelja $\hat{\Theta}_2$, procjenitelj $\hat{\Theta}_1$ će davati procjenu koja je bliža pravoj vrijednosti θ . Iz toga slijedi logičan princip procjenjivanja – kada imamo veći broj procjenitelja nekog parametra, odabiremo procjenitelja koji ima najmanju varijancu.

Taj procjenitelj se naziva **nepristrani procjenitelj s najmanjom varijancom**, eng., *minimum variance unbiased estimator* (MVUE).

2.2.2. Standardna pogreška procjenitelja parametra

Kada je dana brojčana vrijednost procjene vrijednosti parametra, obično je poželjno imati neku predodžbu o preciznosti te procjene. Mjera preciznosti koje se uobičajeno koristi je standardna greška procjenitelja.

Standardna greška procjenitelja $\hat{\Theta}$, i njegovo standardno odstupanje dano je izrazom

$$\sigma_{\hat{\Theta}} = \sqrt{V(\hat{\Theta})} \quad (2.3.)$$

Ako standardna greška uključuje nepoznate parametre koji mogu biti procijenjeni, zamjenom tih vrijednosti dobivamo **procijenjenu standardnu grešku** koja se označava kao $\hat{\sigma}_{\hat{\Theta}}$. Ponekad procijenjenu standardnu grešku označavamo kao $S_{\hat{\Theta}}$. Pretpostavimo da izuzimamo uzorak iz osnovnog skupa koji se distribuira po normalnoj razdiobi i očekivanju μ i varijanci σ_0^2 . Tada se također \bar{X} distribuira po normalnoj razdiobi sa očekivanjem μ_0 i varijanci $\frac{\sigma_0^2}{n}$, tako da standardna greška \bar{X} glasi

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}} \quad (2.4.)$$

Ako ne znamo σ_0^2 ali smo ga zamijenili sa standardnom pogreškom uzorka s u gornjoj jednadžbi, procijenjena standardna greška \bar{X} glasila bi

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (2.5.)$$

Kada se procjenitelj ponašao po normalnoj razdiobi kao što je slučaj u ovoj situaciji, možemo reći da prava vrijednost parametra \bar{X} leži u intervalu $\bar{X} \pm 2\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ uz vjerodostojnost $P = 95,45 \%$

CENTRALNI GRANIČNI TEOREM

Ako je X_1, X_2, \dots, X_n slučajan uzorak veličine n uzet iz populacije s očekivanjem μ i varijancom σ_0^2 i ako je \bar{X} aritmetička sredina uzorka, oblik razdiobe

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0^2 / \sqrt{n}} \quad (2.6.)$$

ukoliko $n \rightarrow \infty$ je normalna jedinična razdioba. Ako uzorke izuzimamo iz osnovnog skupa koji ima nepoznatu razdiobu, razdiobe aritmetičkih sredina uzoraka vrlo brzo će se približavati normalnoj razdiobi neovisno o vrsti razdiobe osnovnog skupa ako veličina uzorka n teži u beskonačnost ($n \rightarrow \infty$). Ovo je jedan od najkorištenijih teorema u statistici.

2.3. Pristrane procjene parametara osnovnog skupa

2.3.1. Srednji kvadrat odstupanja procjenitelja parametra

Ponekad je potrebno koristiti pristrane procjenitelje. U tim slučajevima jako je važan srednji kvadrat odstupanja procjenitelja.

Srednji kvadrat odstupanja $\hat{\Theta}$ je očekivana kvadratna razlika između procjenitelja $\hat{\Theta}$ i parametra θ .

$$MSE(\hat{\Theta}) = E(\hat{\Theta} - \theta)^2 \quad (2.7.)$$

Jednadžba iznad može se raspisati:

$$MSE(\hat{\Theta}) = E[\hat{\Theta} - E(\hat{\Theta})]^2 + [\theta - E(\hat{\Theta})]^2 = V(\hat{\Theta}) + (\text{bias})^2 \quad (2.8.)$$

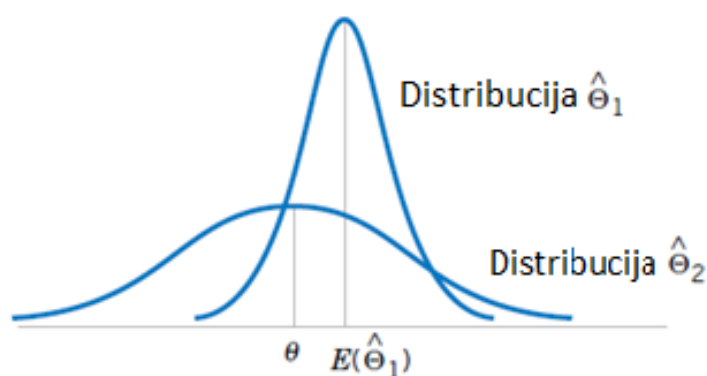
gdje je *bias* **veličina pristranosti**.

Tako vidimo da je srednji kvadrat odstupanja $\hat{\Theta}$ jednak zbroju varijance procjenitelja i kvadratu veličine pristranosti *bias*. Srednji kvadrat odstupanja je važan kriterij u usporedbi dvaju procjenitelja. Neka su $\hat{\Theta}_1$ i $\hat{\Theta}_2$ dva procjenitelja parametra θ i neka su $MSE(\hat{\Theta}_1)$ i $MSE(\hat{\Theta}_2)$ srednji kvadrati odstupanja procjenitelja $\hat{\Theta}_1$ i $\hat{\Theta}_2$. Tada je **relativna učinkovitost** procjenitelja $\hat{\Theta}_2$ u odnosu na $\hat{\Theta}_1$ definirana kao

$$\frac{MSE(\hat{\Theta}_1)}{MSE(\hat{\Theta}_2)} \quad (2.9.)$$

Ako je relativna učinkovitost manja od 1, možemo zaključiti da je procjenitelj $\hat{\Theta}_1$ učinkovitiji u procjeni parametra θ od procjenitelja $\hat{\Theta}_2$, i u tom slučaju ima manji srednji kvadrat odstupanja.

Ponekad su nam pristrani procjenitelji prihvatljiviji od nepristranih zato jer imaju manji srednji kvadrat odstupanja. Na primjer, slika 3. ilustrira dvije razdiobe procjenitelja; razdiobu pristranog procjenitelja $\hat{\Theta}_1$ koji ima manju varijancu od prikazanog nepristranog procjenitelja $\hat{\Theta}_2$. Procjena bazirana na procjenitelju $\hat{\Theta}_1$ će vrlo vjerojatno biti bliža pravoj vrijednosti parametra θ nego procjena bazirana na procjenitelju $\hat{\Theta}_2$.



Slika 3. Dva procjenitelja s različitim parametrima razdiobe [2]

Procjenitelj $\hat{\Theta}$ koji ima srednji kvadrat odstupanja koji je manji ili jednak srednjem kvadratu odstupanja bilo kojeg drugo procjenitelja, za sve vrijednosti parametra θ , naziva se **optimalan** procjenitelj parametra θ . Optimalni procjenitelji rijetko postoje.

2.4. Metode procjenjivanja parametara

Definicija nepristranosti i ostala svojstva procjenitelja ne daju nikakvu sigurnost koliko će dobre procjene biti dobivene. U daljnjem radu objasnit ću 2 metode procjenjivanja parametara: *metodu momenata* i *metodu najveće vjerodostojnosti*. Metoda najveće vjerodostojnosti je generalno bolja od metode momenata zato što njena svojstva imaju bolju učinkovitost. Međutim, momenti procjenitelji su ponekad lakši za računanje.

2.4.1. Metoda momenata

Ideja metode momenata je izjednačiti **momente populacije**, koji su definirani u uvjetima očekivanih vrijednosti, sa odgovarajućim **momentima uzorka**. Momenti populacije će biti funkcije nepoznatih parametara i zatim će se te jednačbe riješiti i zapravo otkriti procjenitelja nepoznatih parametara. Neka X_1, X_2, \dots, X_n bude slučajan uzorak iz osnovnog skupa funkcije vjerojatnosti $f(x)$, koja može biti diskretna funkcija vjerojatnosti ili kontinuirana funkcija gustoće vjerojatnosti.

k-ti **moment populacije**:

$$E(X^k), k = 1, 2, \dots \quad (2.10.)$$

a odgovarajući **pomoćni moment**:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1, 2, \dots \quad (2.11.)$$

Pojašnjeno, prvi moment populacije:

$$E(x) = \mu \quad (2.12.)$$

a pomoćni moment uzorka je:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k = \bar{X} \quad (2.13.)$$

Prema tome, izjednačavanjem momenata populacije i uzorka, dobivamo da je

$$\mu = \bar{x} \quad (2.14.)$$

odnosno **aritmetička sredina uzorka \bar{X}** je **procjenitelj očekivanja populacije μ** .

2.4.2. Metoda najveće vjerodostojnosti

Jedna od najboljih metoda procjenjivanja parametra je metoda najveće vjerodostojnosti. Ova metoda razvijena je 20-im godinama 20. stoljeća od strane poznatog britanskog statističara Sir R. A. Fishera. Metoda najveće vjerodostojnosti temelji se na pretpostavci da je poznat oblik funkcije vjerojatnosti osnovnog skupa. Ona se sastoji u traženju one procjene nepoznatog parametra za koji zajednička funkcija vjerodostojnosti uzorka, odnosno realizacije statističkog procesa doseže maksimum [2].

Pretpostavimo da je X slučajna varijabla sa funkcijom gustoće vjerojatnosti $f(x; \theta)$, gdje je θ jedini nepoznati parametar. Neka su x_1, x_2, \dots, x_n , promatrane vrijednosti iz slučajnog uzorka veličine n .

Tada je funkcija vjerodostojnosti uzorka

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot f(x_3; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta) \quad (2.15.)$$

Primijetimo kako je funkcija vjerodostojnosti sada samo funkcija nepoznatog parametra θ . Procjenitelj **najveće vjerodostojnosti** parametra θ je onaj procjenitelj kada funkcija vjerodostojnost $L(\theta)$ i postiže maksimum.

U slučaju diskretne varijable, interpretacija funkcije najveće vjerodostojnosti je jasna. Funkcija najveće vjerodostojnosti uzorka $L(\theta)$ je zapravo vjerojatnost P :

$$P(X_1 = x, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \quad (2.16.)$$

Funkcija $L(\theta)$ je vjerojatnost pojavljivanja vrijednosti uzorka x_1, x_2, \dots, x_n . Stoga u slučaju diskretne varijable procjenitelj najveće vjerodostojnosti je onaj procjenitelj kada je **vjerojatnost P** pojavljivanja određenih vrijednosti u uzorku **maksimalna**. Metoda najveće vjerodostojnosti se može koristiti u situacijama kada imamo nekoliko nepoznatih parametara $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ koje trebamo procijeniti. U ovakvim slučajevima funkcija vjerodostojnosti je funkcija od k nepoznatih parametara $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Procjenitelj najveće vjerodostojnosti $\{\hat{\theta}_i\}$ pronalazi se izjednačavanjem k parcijalnih derivacija $\frac{\partial L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$ sa 0 i rješavanjem tih jednačbi.

Svojstva procjenitelja najveće vjerodostojnosti

Pod vrlo općenitim uvjetima, kada je uzorak veličine n velik i ako je $\{\hat{\theta}_i\}$ procjenitelj najveće vjerodostojnosti parametra θ vrijedi [2]:

- a) $\hat{\theta}$ je približno nepristrani procjenitelj parametra θ [$E(\hat{\theta}) \cong \theta$]
- b) Varijanca procjenitelja $\hat{\theta}$ je približno mala kao varijanca bilo kojeg drugog procjenitelja
- c) $\hat{\theta}$ ima približno normalnu distribuciju

Svojstva navedena pod a) i b) u suštini govore da je procjenitelj najveće vjerodostojnosti približno i nepristrani procjenitelj s najmanjom varijancom (MVUE). Ova činjenica je vrlo poželjna, i uz saznanje da procjenitelj ima približno normalnu distribuciju (kada je n velik) postaje nam jasno zašto se metoda najveće vjerodostojnosti naširoko primjenjuje.

2.5. Intervalne procjene parametara

2.5.1. Interval vjerodostojnosti – razvoj i osnovna svojstva

U prijašnjem dijelu rada objasnio sam kako neki parametar osnovnog skupa može biti procijenjen na temelju podataka iz uzorka. Međutim, vrlo je važno razumjeti koliko je dobro procijenjen taj parametar. Na primjer, pretpostavimo da smo procijenili viskoznost neke kemijske tekućine da je $\hat{\mu} = \bar{x} = 1$. Međutim zbog varijabilnosti uzorka gotovo nikad neće biti slučaj da je $\mu = \bar{x}$. *Točkasti procjenitelj* nam neće dati odgovor koliko procijenjeno očekivanje $\hat{\mu}$ odstupa od stvarnog očekivanja osnovnog uozorka μ . Da li je očekivana vrijednost u granicama između 0,5 i 1,5 ili je u granicama između 0,9 i 1,1? Odgovor na to pitanje može se dobiti koristeći *intervalnu procjenu*. Granice koje predstavljaju vjerodostojne vrijednosti za parametar su primjeri *intervalne procjene*. Taj interval procjene parametra osnovnog skupa naziva se **interval vjerodostojnosti (povjerenja)**. Osnovna ideja intervala vjerodostojnosti najlakše se može razumjeti promatrajući sljedeći primjer.

Pretpostavimo da su X_1, X_2, \dots, X_n slučajan uzorak iz osnovnog skupa normalne razdiobe sa nepoznatim očekivanjem μ i poznatom varijancom σ_0^2 . Znamo da se aritmetička sredina uzorka \bar{X} normalno distribuira sa očekivanjem μ i varijancom σ^2/n . Možemo standardizirati \bar{X} oduzimanjem očekivanja μ i dijeljenjem sa standardnom devijacijom σ , što će rezultirati parametrom

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (2.17.)$$

z je jedinična normalna razdioba.

Pomoću *intervala vjerodostojnosti* procjenjujemo da će se očekivanje μ nalaziti u intervalu $l \leq \mu \leq u$ gdje su krajnje točke l i u izračunate iz podataka uzorka. Budući da će različiti uzorci rezultirati različitim krajnjim točkama, te krajnje točke su zapravo vrijednosti slučajnih varijabli L i U . Pretpostavimo da možemo odrediti vrijednosti L i U tako da je slijedeći izraz istinit:

$$P\{L \leq \mu \leq U\} = 1 - \alpha \quad (2.18.)$$

gdje je $0 \leq \alpha \leq 1$. Postoji vjerojatnost od $1 - \alpha$ da ćemo odabrati uzorak za koji će interval vjerodostojnosti sadržavati stvarnu vrijednost parametra μ . Jednom kada smo odabrali uzorak, $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ i izračunali krajnje točke l i u , dobili smo interval vjerodostojnosti za parametar μ koji glasi

$$l \leq \mu \leq u \quad (2.19.)$$

Krajnje točke ili granice l i u nazivaju se **gornje i donje granice intervala vjerodostojnosti**, dok se vrijednost $1 - \alpha$ naziva **razina vjerodostojnosti**. [2]

Sređivanjem izraza dolazimo do konačne definicije:

Ako je \bar{x} očekivanje slučajnog uzorka veličine n uzetog iz osnovnog skupa poznate varijance σ_0^2 , sa vjerojatnošću $100(1 - \alpha)\%$ možemo intervalno procjeniti vrijednost očekivanja μ osnovnog skupa izrazom

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_0^2/\sqrt{n} \quad (2.20.)$$

gdje je $z_{\alpha/2}$ koeficijent vjerodostojnosti i ovisi o razini vjerodostojnosti $1 - \alpha$.

2.5.2. Određivanje veličine uzorka

Veličina slučajnog uzorka za procjenu aritmetičke sredine osnovnog skupa ovisi o ovim elementima [2]:

1. Vrsti osnovnog skupa, koji je konačan ili beskonačan
2. Razini vjerodostojnosti procjene
3. Željenoj preciznosti procjene
4. Stupnju varijabilnosti obilježja čija se aritmetička sredina procjenjuje koji se mjeri standardnom devijacijom osnovnog skupa ili koeficijentom varijacije

Preciznost intervala vjerodostojnosti iznosi $2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}}$. Iz toga možemo zaključiti da ako koristimo \bar{x} u procjeni μ , pogreška procjene $\varepsilon = |\bar{x} - \mu|$ je manja ili jednaka iznosu $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}}$ sa vjerojatnošću od $100(1 - \alpha)\%$. U situacijama gdje možemo kontrolirati veličinu uzorka, možemo odabrati uzorak veličine n tako da pogreška u procjeni μ bude manja od određene granice u pogrešci ε uz razinu vjerodostojnosti $100(1 - \alpha)$. Prikladna veličina uzorka n dobiva se sljedećeg izraza uz razinu vjerodostojnosti $100(1 - \alpha)$:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma_0^2}{\varepsilon} \right)^2 \quad (2.21.)$$

2.5.3. Intervalna procjena očekivanja osnovnog skupa

2.5.3.1 Intervalna procjena očekivanja osnovnog skupa na velikom uzorku

Pretpostavili smo da je razdioba osnovnog skupa normalna uz nepoznato očekivanje i poznatu standardnu devijaciju σ_0 . To je vrlo rijetko i gotovo nemoguće stanje. No intervalno možemo procijeniti očekivanje nekog osnovnog skupa koji ne zahtijeva ove pretpostavke. Neka je X_1, X_2, \dots, X_n slučajan uzorak iz populacije sa nepoznatim očekivanjem μ i varijancom σ_0^2 . Ako je uzorak n velik, centralni granični teorem podrazumijeva da \bar{X} ima približno normalnu

distribuciju sa očekivanjem μ i varijancom σ^2/n . Stoga parametar $z = (\bar{X} - \mu)/(\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$ ima približno normalnu distribuciju. Međutim, standardna devijacija σ je nepoznata. No ako je veličina uzorka n dovoljno velika, zamjena standardne devijacije osnovnog skupa σ_0 sa nepristranom procjenom standardne devijacije " s " imat će malo utjecaja na distribuciju varijable z .

Nepriistrana procjena varijance računa se izrazom:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (2.22.)$$

To vodi do sljedećih korisnih rezultata:

Kada je n dovoljno velik,

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad (2.23.)$$

Ima približno normalnu distribuciju. Stoga,

$$\bar{x} - \frac{z\alpha}{2} \cdot s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{z\alpha}{2} \cdot s_{\bar{x}} \quad (2.24.)$$

gdje je

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (2.25.)$$

standardna pogreška aritmetičke sredine uzorka. 2.24. je izraz za intervalnu procjenu očekivanja μ osnovnog skupa uz razinu vjerodostojnosti $100(1 - \alpha)\%$. Općenito, veličina uzorka n bi trebala biti minimalno 30 da bi se ovi izrazi mogli pouzdano koristiti.

2.5.3.2 Studentova t- razdioba

Kada radimo intervalne procjene očekivanja osnovnog skupa koji se normalno distribuira i kada nam je poznata njegova varijanca σ_0^2 tada se služimo procedurom opisanom u ranijem poglavlju. Tada je ta intervalna procjena približno točna sve dok je veličina uzorka $n \geq 30$. Kao što je objašnjeno ranije, čak možemo riješavati slučaj sa velikim uzorkom kada nam je

varijanca σ_0^2 . nepoznata. No kada imamo mali uzorak n i kada nam je varijanca σ_0^2 . nepoznata, tada moramo uvoditi neke pretpostavke o razdiobi osnovnog skupa kako bi dobili valjanu intervalnu procjenu. Razumna pretpostavka u mnogo slučajeva je ta da je razdioba osnovnog skupa **normalna**. Pretpostavimo da se osnovna populacija ponaša po normalnoj razdiobi sa nepoznatim očekivanjem μ i nepoznatom varijancom σ_0^2 . Također pretpostavimo da imamo slučajan uzorak veličine n ; X_1, X_2, \dots, X_n i neka su \bar{X} i s^2 očekivanje i varijanca uzorka. Ako je varijanca σ^2 poznata, tada znamo da varijabla $z = (\bar{X} - \mu) / (\frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}})$ ima normalnu razdiobu. Kada je varijanca σ^2 nepoznata, tada varijabla z zamjenom σ_0 sa standardnom devijacijom " s " postaje $t = (\bar{X} - \mu) / (\frac{s}{\sqrt{n}})$. Ako je uzorak n velik, ova zamjena gotovi ni malo ne utječe na razdiobu varijable t . Međutim, veličina uzorka n je vrlo često malena u inženjerskim problemima i u ovoj situaciji moramo primijeniti drukčiju razdiobu za postupak intervalne procjene očekivanja.

Neka je X_1, X_2, \dots, X_n slučajan uzorak iz populacije sa nepoznatim očekivanjem μ i varijancom σ^2 . t

Varijabla

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad (2.26.)$$

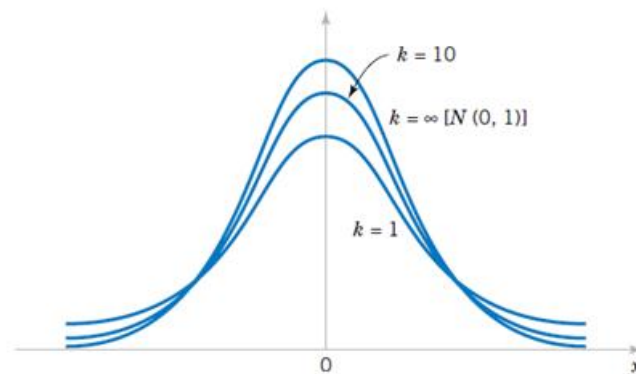
se ponaša po t – razdiobi sa $n - 1$ stupnjeva slobode.

Funkcija gustoće vjerojatnosti t – razdiobe je

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{(k+1)}{2}\right]}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{x^2}{k}\right) + 1\right]^{\frac{k+1}{2}}} \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.27.)$$

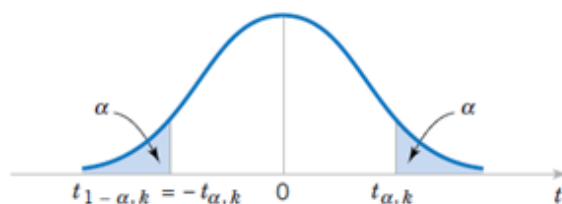
gdje je k broj stupnjeva slobode.

t – razdioba s različitim parametrima prikazana je na slici 4.



Slika 4. Funkcija gustoće vjerojatnosti t - razdiobe sa različitim parametrima [2].

Općenito, t razdioba je slična normalnoj razdiobi u smislu da sa obje razdiobe simetrične i unimodalne i maksimalna vrijednost na ordinati postiže se kada je očekivanje $\mu = 0$. Međutim t razdioba ima višlje „repove“ nego normalna razdioba, tj. ima veću vjerojatnost na „repovima“ nego normalna razdioba. Kako se broj stupnjeva slobode povećava prema $k \rightarrow \infty$, granični oblik t razdiobe je normalna razdioba. Općenito, broj stupnjeva slobode za t razdiobu je broj stupnjeva slobode povezan sa procijenjenom standardnom devijacijom.



Slika 5. Koefficienti vjerodostojnosti t razdiobe [2]

Ako su \bar{x} i s očekivanje i standardna devijacija slučajnog uzorka uzetog iz osnovnog skupa koji ima normalnu razdiobu sa nepoznatom varijancom σ^2 ,

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (2.28.)$$

je izraz za intervalnu procjenu očekivanja μ osnovnog skupa uz razinu vjerodostojnosti $100(1 - \alpha)\%$ gdje je $t_{\alpha/2, n-1}$ gornji koefficient vjerodostojnosti t razdiobe sa $n - 1$ stupnjeva slobode.

2.5.4. Intervalna procjena varijance osnovnog skupa

Ponekad je potrebna intervalna procjena varijance ili standardne devijacije osnovnog skupa koja je nepoznata i to je uobičajen slučaj u analizi i primjeni inferencijalne statistike u proizvodnim procesima. Neka je X_1, X_2, \dots, X_n slučajan uzorak iz populacije sa očekivanjem μ i varijancom σ^2 , i neka je s^2 nepristrana procjena varijance. Tada će se varijabla

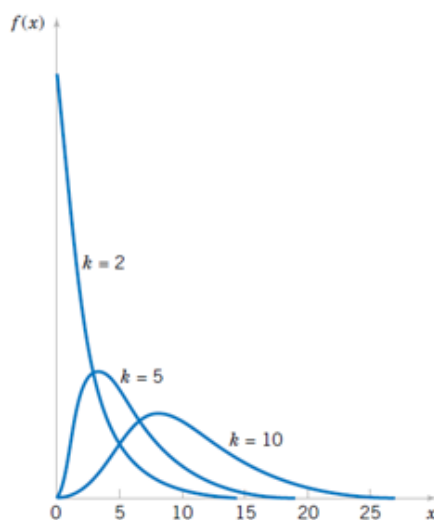
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad (2.29.)$$

ponašati po hi – kvadrat (χ^2) razdiobi sa $n - 1$ stupnjeva slobode.

Funkcija gustoće vjerojatnosti χ^2 razdiobe je

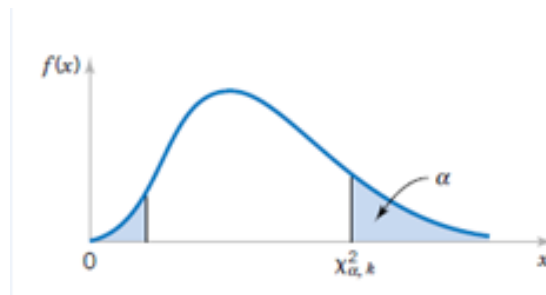
$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \quad x > 0 \quad (2.30.)$$

gdje je k broj stupnjeva slobode. Očekivanje i varijanca χ^2 razdiobe su k i $2k$. Na slici 6. je prikazana hi – kvadrat razdioba sa različitim parametrima.



Slika 6. Funkcija gustoće vjerojatnosti hi - kvadrat razdiobe s nekoliko različitih parametara [2]

Vidi se kako je χ^2 razdioba samo pozitivna i da je nagnuta udesno. Međutim, kako se k povećava, razdioba postaje sve više simetrična. Kako $k \rightarrow \infty$, granični oblik χ^2 razdiobe je praktički normalna razdioba.



Slika 7. Koeficijent vjerodostojnosti hi - kvadrat razdiobe [2]

Izraz za intervalnu procjenu varijance osnovnog skupa

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2} \quad (2.31.)$$

uz razinu vjerodostojnosti $100(1-\alpha)\%$, gdje su $\chi_{\alpha/2, n-1}^2$ i $\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$ gornji i donji koeficijenti vjerodostojnosti χ^2 razdiobe sa $n-1$ stupnjeva slobode.

2.5.5. Intervalna procjena proporcija

Intervalnu procjenu proporcija nekog osnovnog skupa koristimo kada se elementi osnovnog skupa razvrstavaju na one elemente osnovnog skupa koje imaju traženo svojstvo A i preostale elemente.

Neki događaj ima proporciju P. Neka je uzorak veličine n uzet iz velikog (vjerojatno beskonačnog) osnovnog skupa, što rezultira proporcijom istog događaja p , ali u uzorku.

Važne pretpostavke za intervalnu procjenu proporcija [4]:

- Proporcija uzorka $p \rightarrow N \{E(p) = P, \sigma_{(p)}\}$
- s_p je nepristrana procjena standardne pogreške proporcije uzorka

$$s_p = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, \quad q = 1 - p \quad (2.32.)$$

- n ... veličina uzorka
- Proporcija P ima normalnu razdiobu

Intervalna procjena proporcija osnovnog skupa glasi:

$$p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_p < P < p + z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot s_p \quad (2.33.)$$

Uz povjerenje (vjerodostojnost) procjene $(1 - \alpha)$.

2.5.6. Intervalna procjena za buduća promatranja

U nekim situacijama željeli bi predvidjeti ponašanje varijabli u budućnosti. To je drukčiji problem nego kod procjenjivanja varijable, tako da interval vjerodostojnosti nije prikladan. Ovdje nam je potreban *interval procjene* buduće vrijednosti normalne slučajne varijable.

Pretpostavimo neka je x_1, x_2, \dots, x_n slučajan uzorak iz normalne populacije. Mi želimo predvidjeti vrijednost x_{n+1} sljedećeg promatranja. Točkasto predviđanje vrijednosti x_{n+1} je aritmetička sredina uzorka \bar{x} . Pogreška predviđanja je $x_{n+1} - \bar{x}$. Očekivani iznos predviđene pogreške je

$$E(x_{n+1} - \bar{x}) = \mu - \mu = 0 \quad (2.34.)$$

i varijanca predviđene pogreške je

$$V(x_{n+1} - \bar{x}) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2(1 + \frac{1}{n}) \quad (2.35.)$$

zato što je buduća promatranja x_{n+1} nezavisno od očekivanja uzorka \bar{x} . Pogreška predviđanja $x_{n+1} - \bar{x}$ je normalno distribuirana, stoga parametar

$$z = \frac{x_{n+1} - \bar{x}}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \quad (2.36.)$$

ima normalnu razdiobu. Zamjena standardne devijacije osnovnog skupa σ s procjenom standardne devijacije uzorka „s“ rezultira parametrom

$$t = \frac{x_{n+1} - \bar{x}}{s \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \quad (2.37.)$$

koji se pokorava Studentovoj t- razdiobi s $(n - 1)$ stupnjeva slobode.

Intervalno predviđanje budućeg promatranja normalne razdiobe glasi

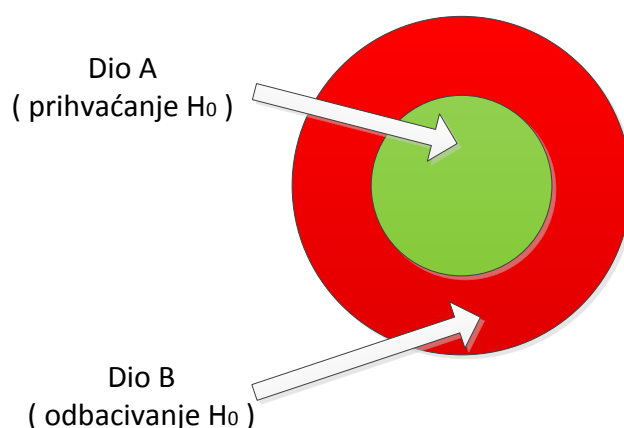
$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq x_{n+1} \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \quad (2.38.)$$

Interval predviđanja za x_{n+1} će uvijek biti veći od intervala procjene za μ zato što je sa pogreškom predviđanja povezano više varijabilnosti nego sa pogreškom procjene .

2.6. Testiranje hipoteza

2.6.1. Testiranje statističkih hipoteza

Statistička hipoteza je tvrdnja o veličini parametra θ ili o obliku distribucije osnovnog skupa. Naziva se hipotezom zato što se ne može točno reći da li je istinita ili nije. *Testiranje statističkih hipoteza* je postupak kojim se donosi odluka o prihvatanju ili neprihvatanju tvrdnje koja se zasniva na temelju podataka iz slučajnog uzorka. Svaki postupak testiranja polazi *od nulte hipoteze* i *alternativne hipoteze* gdje je sadržaj alternativne hipoteze uvijek proturječan sadržaju nulte hipoteze.



Slika 8. Grafički prikaz područja prihvatanja i odbacivanja hipoteze H_0

U postupku odlučivanja mogu se pojaviti dvije vrste pogrešaka. Ukoliko točka T , odnosno računski vrijednost padne u dio B (odbacivanje H_0), i prihvati se alternativna hipoteza H_1 iako je hipoteza H_0 ispravna, nastaje *pogreška I. vrste*. *Pogreška II. vrste* nastaje ukoliko

računska vrijednost padne u dio A (prihvaćanje H_0), a taj dio nije točan i pogrešno se prihvati hipoteza H_0 u slučaju ispravnosti alternativne hipoteze H_1 .

Tablica 1. Načina odlučivanja u statističkoj hipotezi [1]

Odluka	Nulta hipoteza je	
	Istinita	Lažna
Prihvatiti nultu hipotezu	odluka ispravna	pogreška II. vrste
Odbaciti nultu hipotezu	pogreška I. vrste.	odluka ispravna

2.6.2 Testiranje hipoteza na jednom uzorku

2.6.2.1. Testiranje hipoteze o očekivanju osnovnog skupa sa poznatom varijancom

Testiranje hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti očekivanja osnovnog skupa se provodi tako da se iz osnovnog skupa izuzme slučajni uzorak veličine n članova. Ako imamo veliki uzorak ($n > 30$), riječ je o *testu velikim uzorkom* (*z-test*), a ako je u uzorku trideset i manje članova ($n \leq 30$), tada se radi o *malenom uzorku* i provodi se *t-test*.

Postupak testiranja se provodi u nekoliko koraka [2]:

1. Određivanje sadržaja nulte hipoteze
2. Identificiranje izraza za testnu veličinu i izračunavanje njezine vrijednosti
3. Odabir razine značajnosti i određivanje kritičnih granica koje dijele područje prihvaćanja nulte hipoteze od njezina odbacivanja
4. Donošenje zaključka o ishodu testa

Test o očekivanju osnovnog skupa može biti *dvostran* (na dvije granice) ili *jednostran* (na gornju ili na donju granicu). Ako uzorak ima više od 30 članova, možemo zaključiti da je razdioba uzorka normalna ili približno tog oblika $\bar{x} \sim N(\mu_0, \sigma_{\bar{x}}^2)$. Nepoznato nam je očekivanje osnovnog skupa μ , a njegova pretpostavljena veličina je μ_0 . Iz svojstava razdiobe uzorka

izvire test – veličina $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$. U navedenom izrazu \bar{x} je aritmetička sredina uzorka, a μ_0 , pretpostavljena vrijednost očekivanja osnovnog skupa. $\sigma_{\bar{x}}$ predstavlja standardnu pogrešku aritmetičke sredine uzorka.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (2.39.)$$

Odluka o prihvatanju ili odbacivanju nulte hipoteze donosi se usporedbom test – veličine z s teorijskom vrijednošću koeficijenta značajnosti na način koji je naveden u tablici 2.

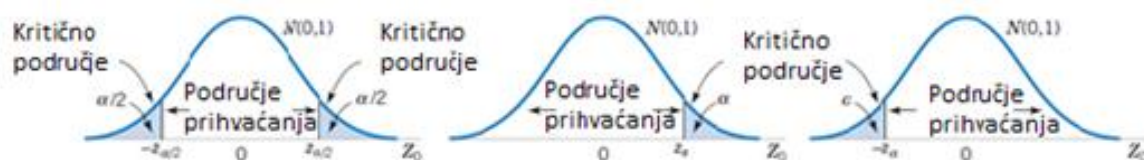
Tablica 2. Način donošenja odluke [1]

Vrsta testa	Nulta hipoteza	Alternativna hipoteza	Područje prihvatanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvostran	$H_0 \dots \mu = \mu_0$	$H_1 \dots \mu \neq \mu_0$	$ z < z_{\alpha/2}$	$ z > z_{\alpha/2}$
Jednostran, na gornju granicu	$H_1 \dots \mu \leq \mu_0$	$H_1 \dots \mu > \mu_0$	$z < z_{\alpha}$	$z > z_{\alpha}$
Jednostran, na donju granicu	$H_1 \dots \mu \geq \mu_0$	$H_1 \dots \mu < \mu_0$	$z > -z_{\alpha}$	$z < -z_{\alpha}$

Koeficijent značajnosti ovisi o razini vjerodostojnosti α , te o vrsti testa. Koeficijent značajnosti se određuje pomoću površina ispod normalne krivulje. Odluka se donosi pomoću kritičnih granica. Za dvosmjernan test kritične granice u kojima se prihvaća nulta hipoteza jesu:

$$c_1 = \mu_0 - z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}}, \quad c_2 = \mu_0 + z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}} \quad (2.40.)$$

Nade li se aritmetička sredina uzorka između granica c_1 i c_2 , nulta hipoteza H_0 se prihvaća. Ako je aritmetička sredina uzorka manja od granice c_1 ili veća od granice c_2 , odbacuje se nulta hipoteza uz razinu vjerodostojnosti α .



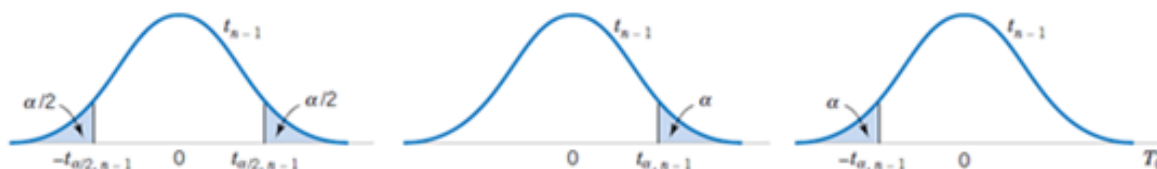
Slika 9. Prikaz područja prihvatanja i odbijanja hipoteze H_0 u slučaju test – veličine „ z “ [2]

2.6.2.2. Testiranje hipoteze o očekivanju osnovnog skupa sa nepoznatom varijancom

Ako imamo osnovni skup koji ima normalnu razdiobu, ali ne znamo njegovu varijancu, testiranje hipoteze o pretpostavljanoj vrijednosti očekivanja osnovnog skupa temeljit će se na Studentovoj razdiobi. I ovdje se polazi da je nulta hipoteza H_0 istinita, a test – veličina koja proizlazi iz uzorka je

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \quad (2.41.)$$

Ako je nulta hipoteza istinita, test – veličina se distribuira po t -razdiobi (Studentovoj razdiobi) s $(n - 1)$ stupnjem slobode. Kritične granice se određuju sličnim postupkom kao i u slučaju kada nam je poznata varijanca osnovnog skupa, samo što se umjesto *test – veličine* z koja se normalno distribuira koristi *test- veličina* t koja ima Studentovu razdiobu. Kritična vrijednost t_{α} je ona vrijednost koja dijeli hipotezu H_0 od hipoteze H_1 uz vjerojatnost pogreške α .



Slika 10. Prikaz područja prihvatanja i odbijanja hipoteze H_0 u slučaju test – veličine „ t “ [2]

Svi oblici hipoteza za jednostrane i dvostrane testove i načini odlučivanja prikazani su u tablici 3.

Tablica 3. Način odlučivanja [1]

Vrsta testa	Nulta hipoteza	Alternativna hipoteza	Područje prihvatanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvostran	$H_0 \dots \mu = \mu_0$	$H_1 \dots \mu \neq \mu_0$	$ t < t_{\alpha/2}$	$ t > t_{\alpha/2}$
Jednostran, na gornju granicu	$H_1 \dots \mu \leq \mu_0$	$H_1 \dots \mu > \mu_0$	$t < t_\alpha$	$t > t_\alpha$
Jednostran, na donju granicu	$H_1 \dots \mu \geq \mu_0$	$H_1 \dots \mu < \mu_0$	$t > -t_\alpha$	$t < -t_\alpha$

2.6.2.3. Testiranje hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti varijance osnovnog skupa

Testiranje hipoteze o vrijednosti varijance osnovnog skupa važno je jer varijanca izražava stupanj varijabilnosti numeričkih podataka. Testiranje hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti varijance osnovnog skupa koji se normalno distribuira, $N(\mu, \sigma^2)$ temelji se na slučajnom uzorku veličine n . Pretpostavimo li da je $\sigma^2 = \sigma_0^2$ i da je nulta hipoteza H_0 istinita, tada nam je test – veličina

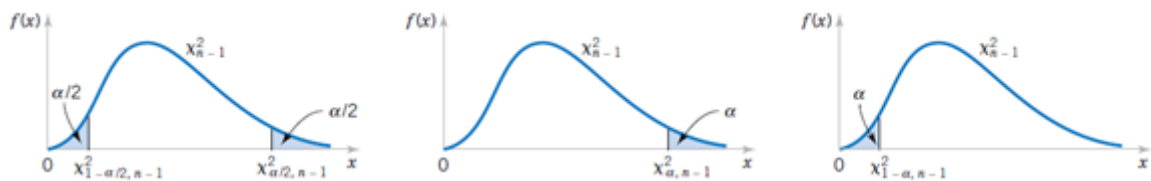
$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s}{\sigma_0^2} \quad (2.42.)$$

i ona se distribuira prema χ^2 razdiobi s $(n-1)$ stupnjem slobode. Odluka se donosi usporedbom test – veličine s teorijskom vrijednosti h_i – kvadrat distribucije za određeni broj stupnjeva slobode i za razinu vjerodostojnosti α . Hipoteze i način donošenja odluka dani su u tablici 4.

Tablica 4. Način odlučivanja o pretpostavljenoj vrijednosti varijance[1]

Vrsta testa	Hipoteze	Područje prihvatanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvostran	$H_0 \dots \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 \dots \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 < \frac{(n-1)s}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2, n-1}^2$	$\frac{(n-1)s}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$ ili $\frac{(n-1)s}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha/2, n-1}^2$
Jednostran, na gornju granicu	$H_0 \dots \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_0 \dots \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)s}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2, n-1}^2$	$\frac{(n-1)s}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha/2, n-1}^2$
Jednostran, na donju granicu	$H_0 \dots \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_0 \dots \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)s}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha/2, n-1}^2$	$\frac{(n-1)s}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$

Vrijednosti $\chi_{\alpha/2, n-1}^2$ i $\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$ u tablici 4. su gornji i donji koeficijenti vjerodostojnosti χ^2 razdiobe sa $n - 1$ stupnjeva slobode i uz razinu vjerodostojnosti α .



Slika 11. Prikaz područja prihvatanja i odbijanja hipoteze H_0 u slučaju test – veličine „ χ^2 “ [2]

2.7. Usporedba parametara osnovnih skupova

2.7.1 Test hipoteza o razlici očekivanja dvaju osnovnih skupova nezavisnim uzorcima

Testiranje hipoteza o razlici očekivanja dvaju osnovnih skupova kao i u svakom testu temelji se na sadržaju nulte i alternativne hipoteze. Test o razlici očekivanja može biti *jednostran* ili *dvostran*. Hipoteze o razlici očekivanja osnovnih skupova i područja prihvatanja i odbacivanja nulte hipoteze uz razinu vjerodostojnosti α dani su u tablici 5.

Tablica 5. Način odlučivanja [1]

Vrsta testa	Nulta hipoteza	Alternativna hipoteza	Područje prihvatanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvostran	$H_0 \dots \mu_1 - \mu_2 = D_0$	$H_0 \dots \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$ t < t_{\alpha/2}$	$ t > t_{\alpha/2}$
Jednostran, na gornju granicu	$H_0 \dots \mu_1 - \mu_2 \leq D_0$	$H_0 \dots \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$t < t_{\alpha}$	$t > t_{\alpha}$
Jednostran, na donju granicu	$H_0 \dots \mu_1 - \mu_2 \geq D_0$	$H_0 \dots \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$t > -t_{\alpha}$	$t < -t_{\alpha}$

gdje je vrijednost t test – veličina koja se distribuira po Studentovoj razdiobi i određuje pomoću izraza

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \quad (2.43.)$$

U nazivniku veličine t nalazi se standardna pogreška razlike aritmetičkih sredina uzoraka koja se računa prema izrazu

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \dots \text{ za uzorke s } n_1 + n_2 > 30 \quad (2.44.)$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} \dots \text{ za uzorke s } n_1 + n_2 < 30 \quad (2.45.)$$

Za dvosmjernan test kritične granice u kojima se prihvaća nulta hipoteza jesu:

$$c_1 = D_0 - t_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}, \quad c_2 = \mu_0 + t_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \quad (2.46.)$$

Nađe li se razlika aritmetička sredina uzoraka $\hat{D}_0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ između granica c_1 i c_2 , nulta hipoteza H_0 se prihvaća. Ako je aritmetička sredina uzorka manja od granice c_1 ili veća od granice c_2 , odbacuje se nulta hipoteza uz razinu vjerodostojnosti α . Ako je $D_0 = 0$, riječ je o testu jednakosti očekivanja dvaju osnovnih skupova.

2.7.2 Usporedba varijanci dvaju osnovnih skupova

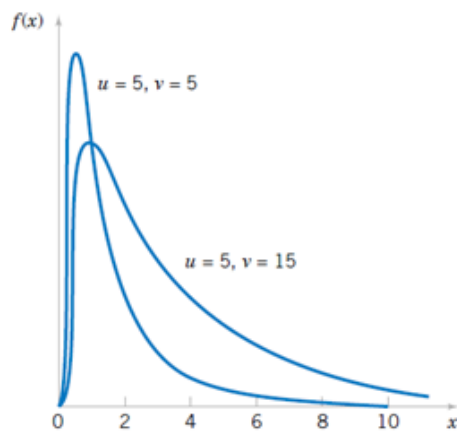
Usporedbom varijanci dvaju osnovnih skupova uspoređujemo stupanj disperzije osnovnih skupova. Dva različita osnovna skupa mogu imati jednak ili različit stupanj disperzije. Neka vrijednosti $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{n_1,1}$ čine slučajan uzorak iz osnovnog skupa $N(\mu_1, \sigma_1)$, a neka vrijednosti $x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n_2,2}$ čine slučajan uzorak iz osnovnog skupa $N(\mu_2, \sigma_2)$. Varijance ovih osnovnih skupova nam nisu poznate, dok varijance uzoraka slijede iz sljedećih izraza

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}, \quad s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1} \quad (2.47.)$$

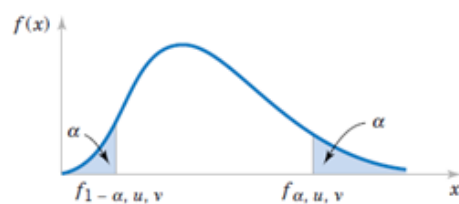
Ako pretpostavimo da su uzorci nezavisni i da su izabrani iz normalno distribuiranih osnovnih skupova, tada se omjer

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (2.48.)$$

ponaša po F razdiobi s ($k_b = n_1 - 1, k_n = n_2 - 1$) stupnjeva slobode.



Slika 12. Funkcija gustoće vjerojatnosti F razdiobe sa nekoliko različitih parametara [2]



Slika 13. Prikaz donje i gornje granice intervala vjerodostojnosti F razdiobe [2]

Hipoteze i način donošenja odluka dani su u tablici 6.

Tablica 6. Tablica odlučivanja [1]

Vrsta testa	Nulta hipoteza	Alternativna hipoteza	Područje prihvatanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjernan	$H_0 \dots \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	$H_1 \dots \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\alpha/2}$ ili $\frac{s_1^2}{s_2^2} > \frac{1}{F_{\alpha/2}}$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha/2}$ ili $\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F_{\alpha/2}}$
Jednosmjernan	$H_0 \dots \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$	$H_1 \dots \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_\alpha$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_\alpha$
Jednosmjernan	$H_0 \dots \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$	$H_1 \dots \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$	$\frac{s_2^2}{s_1^2} < F_\alpha$	$\frac{s_2^2}{s_1^2} > F_\alpha$

Teorijska vrijednost F – razdiobe određuje se prema razini vjerodostojnosti α i broju stupnjeva slobode $k_b = n_1 - 1, k_n = n_2 - 1$ iz tablica ili uporabom računalnog programa.

2.7.3. Testiranje značajnosti razlike stvarnih i teorijskih frekvencija

χ^2 - test

χ^2 - test primjenjuje se u različitim statističkim postupcima. Na primjer, taj test se koristi da bi se ispitala pretpostavka o *obliku razdiobe osnovnog skupa* iz kojeg potječe uzorak koji promatramo. Pri tome se testira hipoteza o razdiobi osnovnog skupa *s pretpostavljenim parametrima*. χ^2 - testom se ispituje i hipoteza o *jednakosti proporcija triju ili više osnovnih skupova*. Primjenjuje se i u ispitivanju *pretpostavke o neovisnosti obilježja u tablici kontigencije u testu homogenosti* (eng. *fixed margin test*) i dr. Provedba χ^2 - testa o *obliku razdiobe populacije, tj. osnovnog skupa* temelji se na slučajnom uzorku n članova. Prije testiranja radi se razvrstavanje n podataka iz uzorka u k grupa, čime se dolazi do empirijske razdiobe, odnosno statističkog niza. Zatim slijedi izbor modela – teorijske razdiobe s kojom se uspoređuje empirijska razdioba. Ukoliko parametri teorijske razdiobe nisu poznati, procjenjuju se uporabom podataka iz uzorka. Na temelju pretpostavljene razdiobe osnovnog skupa računaju se očekivane frekvencije koje se uspoređuju s empirijskim frekvencijama. Test – veličina je empirijski χ^2 ,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \quad (2.49.)$$

U navedenom izrazu f_i su apsolutne empirijske frekvencije, a e_i su apsolutne očekivane frekvencije.

Postavljanje hipoteza:

H_0 ...razlike $f_i - e_i$ su slučajne

H_1 ...razlike $f_i - e_i$ su značajne,

Odluka se donosi usporedbom test – veličine χ^2 s teorijskom vrijednošću $\chi_\alpha^2 (k - g - 1)$ gdje je α odabrana razina vjerodostojnosti, a $(k - g - 1)$ broj stupnjeva slobode gdje je k broj grupa (članova statističkog niza), g je broj parametara procijenjene razdiobe. Nulta hipoteza se prihvća ukoliko je $\chi^2 \leq \chi_\alpha^2$, a ne prihvća ukoliko je $\chi^2 > \chi_\alpha^2$. Da bi primjena testa bila valjana, sve očekivane frekvencije moraju biti veće od 5 ($e_i > 5$). U slučaju prilagodbe razdioba potrebno je kombinirati sa susjednom frekvencijom (grupom).

2.7.4. Test Kolmogorov – Smirnova

Test Kolmogorov – Smirnova se kao i χ^2 - test koristi u slučaju ispitivanja pretpostavke o *obliku razdiobe osnovnog skupa*. Funkcija razdiobe osnovnog skupa nije poznata i za nju se nultom hipotezom pretpostavlja da ima oblik $F_0(x)$. Aternativna hipoteza sadrži suprotnu tvrdnju.

Pretpostavljene hipoteze:

$$H_0 \dots F(x) = F_0(x),$$

$$H_1 \dots F(x) \neq F_0(x)$$

Provjera nulte hipoteze se kao i u χ^2 - testu provodi na temelju uzorka n vrijednosti numeričke varijable.

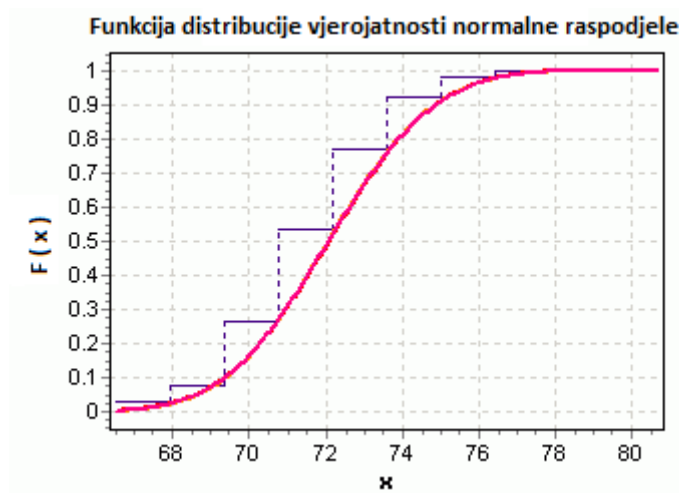
Za test- veličinu uzima se *najveća apsolutna razlika vrijednosti empirijske funkcije distribucije vjerojatnosti i vrijednosti pretpostavljene (teorijske) funkcije distribucije vjerojatnosti*.

$$D_1 = \sup |\hat{F}_0(x) - F_0(x)| \quad (2.50.)$$

Budući da najveća razlika funkcija razdioba ne mora biti u vezi s baš opaženom vrijednosti varijable x pa tako i izračunata razlika D_1 ne mora biti najveća, izračunava se i druga najveća razlika

$$D_2 = \sup |\hat{F}_0(x_{i-1}) - F_0(x_i)|, \hat{F}_0(x) = 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (2.51.)$$

gdje je r broj različitih vrijednosti varijable. Konačna test- veličina je veći iznos izračunatih razlika D_1 i D_2 , odnosno $D = \max\{D_1, D_2\}$. Test se provodi uz razinu vjerodostojnosti α i odluka se donosi usporedbom test- veličine D s odgovarajućom vrijednosti kvantila K-S razdiobe. Ako je test- veličina veća od kritične vrijednosti kvantila K-S razdiobe, nulta hipoteza se ne prihvaća. Kolmogorov – Smirnov test se zasniva na definiranom obliku funkcije razdiobe s *poznatim parametrima*. Ukoliko parametri nisu poznati, test se ne može primijeniti u izvornom obliku. U tome slučaju primjenjuje se modificirani K-S test, koji je poznat pod imenom *Lilliefors-ov* test.



Slika 14. Funkcija distribucije vjerojatnosti normalne raspodjele

Na slici 14. Prikazana je funkcija distribucije vjerojatnosti normalne raspodjele te vrijednosti empirijske funkcije distribucije vjerojatnosti.

2.7.5. Shapiro – Wilk test

U statistici Shapiro – Wilk test se koristi u testiranju normalnosti razdiobe osnovne populacije na osnovi uzorka. Objavili su ga Samuel Shapiro i Martin Wilk 1965. godine. Shapiro – Wilk test testira nultu hipotezu H_0 koja glasi da je uzorak veličine x_1, \dots, x_n veličine n izuzet iz populacije koja ima normalnu razdiobu. Test veličina je

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.52.)$$

gdje je $x_{(i)}$ statistički niz, \bar{x} aritmetička sredina uzorka dok su parametri a_i određeni izrazom

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{mV^{-1}}{\sqrt{mV^{-1}V^{-1}m}} \quad (2.53.)$$

gdje je $m = (m_1, \dots, m_n)^T$

a vrijednosti m_1, \dots, m_n su očekivane vrijednosti statističkog niza nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable uzorkovane iz osnovnog skupa normalne distribucije, a V je matrica kovarijance tih statističkih nizova. Nulta hipoteza H_0 se odbija ukoliko je vrijednost test veličine W premalena, odnosno ukoliko je p – vrijednost manja od razine vjerodostojnosti α . [6]

2.8. Linearna korelacija

Korelacija predstavlja međusobnu povezanost između različitih događaja ili pojava predstavljenih vrijednostima dvaju varijabli. Ako je povezanost po obliku linearna, govorimo o linearnoj korelaciji. Standardizirana mjera jakosti statističke veze između dvaju pojava koje su predočene *kvantitativnim varijablama* jest *koeficijent korelacije*. polazna veličina za mjerenje povezanosti dviju pojava je kovarijanca. Kovarijanca je prvi mješoviti moment varijabli X i Y . Ako se raspolaze parovima njihovih vrijednosti (x_i, y_i) kovarijanca je dana izrazom

$$\text{cov}(X, Y) = \mu_{11} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (2.54.)$$

ili, u razvijenom obliku:

$$\mu_{11} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.55.)$$

Vidljivo je da je kovarijanca aritmetička sredina umnožaka odstupanja vrijednosti varijable X od njezine aritmetičke sredine i vrijednosti varijable Y od njezine aritmetičke sredine. Kovarijanca ima široku primjenu u statistici i može poprimiti različite vrijednosti. Ako su sve vrijednosti barem jedne varijable jednake, kovarijanca je jednaka nuli. Kovarijanca je pozitivna ako postoji tendencija da iznadprosječne vrijednosti jedne varijable dolaze s iznadprosječnim vrijednostima druge varijable, i obrnuto. Kovarijanca je negativna ako postoji tendencija da iznadprosječne vrijednosti jedne varijable dolaze s ispodprosječnim vrijednostima druge varijable, i obrnuto. Kovarijanca nam govori postoji li ili ne kovarijacija među pojavama, no da bi se dobila mjera stupnja linearne statističke povezanosti dviju pojava, računa se kovarijanca standardiziranih vrijednosti varijabli X i Y . Kovarijanca standardiziranih vrijednosti varijabli X i Y zove se *Pearsonov koeficijent korelacije* ili *produkt moment formula*. [2] On je dan izrazom:

$$r = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.56.)$$

ili raspisano

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)}} , \quad -1 < r < 1 \quad (2.57.)$$

Koeficijent poprima vrijednosti iz zatvorenog intervala od -1 do +1. Ukoliko je vrijednost koeficijenta jednaka nuli, ne postoji linearna korelacija među pojavama. Vrijednost plus jedan govori da je korelacija potpuna i pozitivna smjera, dok vrijednost minus jedan govori da je korelacija potpuna i negativnog smjera. Koeficijent determinacije r^2 nam govori koliko je promjene zavisne varijable objašnjeno promjenom nezavisne varijable.

$$y_i - \bar{y} = y_i - \hat{y} - \bar{y} + \hat{y} \quad (2.58.)$$

$$y_i - \bar{y} = y_i - \hat{y} - \bar{y} + \hat{y} \quad (2.59.)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y} - \bar{y})^2 - 2 \sum_{i=1}^n (\hat{y} - \bar{y})(y_i - \hat{y}) + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 \quad (2.60.)$$

$$SKO_{ukupno} = SKO_{protumačeno} + SKO_{ostatka} \quad (2.61.)$$

$$r^2 = \frac{SKO_{protumačeno}}{SKO_{ukupno}} \quad (2.62.)$$

Koeficijent korelacije se računa kao drugi korijen koeficijenta determinacije r^2 . Kada se govori o jačini veze između dvaju pojava, ne smije se samo uzimati u obzir koeficijent korelacije r , već treba uzeti u obzir i koeficijent determinacije r^2 . Testiranje hipoteze o koeficijentu korelacije osnovnog skupa temelji se na odgovarajućem uzorku. Koeficijent korelacije osnovnog skupa označit će se sa ρ .

Pretpostavke:

$$H_0 \dots \text{koeficijent korelacije osnovnog skupa } \rho = 0$$

$$H_1 \dots \text{koeficijent korelacije osnovnog skupa } \rho \neq 0$$

Ako uzorak potječe iz osnovnog skupa koji ima normalnu razdiobu s koeficijentom korelacije $\rho = 0$, test veličina

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (2.63.)$$

pripada Studentovoj razdiobi s $(n - 2)$ stupnja slobode. Odluka se donosi na način kao i u svakom t – testu, usporedbom izračunate test veličine i kritične (teorijske) vrijednosti Studentove distribucije s $(n - 2)$ stupnja slobode i uz razinu vjerodostojnosti $(1 - \alpha)$.

2.9. Regresija

Regresija je statistička metoda pomoću koje se utvrđuje analitički izraz koji u određenom smislu najbolje predočuje povezanosti dvaju ili više varijabli. Regresiju možemo podijeliti na *jednostavnu*, u kojoj jedna zavisna varijabla ovisi o jednoj nezavisnoj varijabli, i na *višestruku*, u kojoj zavisna varijabla ovisi o 2 ili više nezavisnih varijabli.

Povezanost dvaju varijabli može se opisati različitim oblicima:

- Linearna povezanost: $y = ax + b$
- Krivolinijska:
 - $y = ae^{bx}$
 - $y = a + b \ln x$
 - $y = ab^x$

Cilj regresijske analize je utvrditi *smjer*, *oblik* i *jačinu* veze između analiziranih pojava. Smjer veze može biti pozitivan ili negativan, oblik veze je definiran oblikom matematičke funkcije koja predstavlja deterministički dio modela regresije, dok se jačina veze određuje analizom slučajne varijable regresijskog modela. Slučajnom varijablom se predočuju nesistemske utjecaji, odnosno utjecaji pojava koje nisu uključene u model. Osnovni problem ove metode je odrediti koeficijente regresije a i b .

2.9.1 Jednostavna linearna regresija

U modelu jednostavne linearne regresije vrijednost zavisne varijable y je linearna kombinacija nezavisne varijable x , parametara modela α i b i varijable e koja izražava nesistematske utjecaje na zavisnu varijablu y . kada bi odnos među varijablama bio deterministički, svaka bi vrijednost varijable e bila jednaka nuli.

Opći oblik modela je :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e \quad (2.64.)$$

Jednadžba pravca je određena ako su poznati parametri α i β . Oni su nepoznati i njih procjenjujemo. Neka su a i b procjene parametara, a procjene nepoznatih vrijednosti e jednake u_i . Tada model linearne regresije s procijenjenim parametrima glasi

$$\hat{y}_i = a + bx_i \quad (2.65.)$$

Dok je rezidualno odstupanje jednako razlici procijenjene vrijednosti varijable \hat{y}_i i stvarne vrijednosti y_i

$$u_i = \hat{y}_i - y_i \quad (2.66.)$$

Parametri procijenjenog modela se određuju tako da odstupanja izmjerenih vrijednosti od procijenjene vrijednosti zavisne varijable pomoću modela budu što manja. Postoji više metoda, a najčešće se koristi **metoda najmanjih kvadrata**. Metoda najmanjih kvadrata sastoji se u određivanju onih procjena parametara za koje je suma kvadrata odstupanja procijenjenih i originalnih vrijednosti, tj, rezidualni zbroj kvadrata minimalan.. Metodom se dolazi do izraza za parametre

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad a = \bar{y} - b \bar{x} \quad (2.67.)$$

Rezidualna odstupanja u_i osnovica su za prosudbu reprezentativnosti regresije. Pomoću njih se izračunava varijanca, odnosno standardna devijacija regresije. Varijanca regresije je aritmetička sredina kvadrata rezidualnih odstupanja.

$$\sigma_{\hat{y}_i}^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - a \sum_{i=1}^n y_i - b \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \quad (2.68.)$$

Dok je standardna devijacija pozitivni drugi korijen iz varijance regresije.

$$\sigma_{\hat{y}_i} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - a \sum_{i=1}^n y_i - b \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)} \quad (2.69.)$$

Standardna devijacija nam pokazuje koliko je prosječno odstupanje stvarnih vrijednosti zavisne varijable od regresijskih vrijednosti u mjernim jedinicama zavisne varijable. Koeficijent varijacije regresije je omjer standardne devijacije i aritmetičke sredine pomnožen sa sto.

$$V_{\hat{y}} = \frac{\sigma_{\hat{y}}}{\bar{y}} 100 \quad (2.70.)$$

Koeficijent determinacije r^2 je specifičan pokazatelj reprezentativnosti regresije.

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{a \sum_{i=1}^n y_i + b \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{y}^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}, 0 \leq r^2 \leq 1 \quad (2.71.)$$

Koeficijent determinacije je proporcija modelom protumačenog dijela zbroja kvadrata odstupanja u ukupnom zbroju kvadrata odstupanja. U pravilu, što je koeficijent determinacije bliži jedinici, model je reprezentativniji.

2.9.2 Model višestruke linearne regresije

Model višestruke regresije se koristi kada analitički želimo predložiti statističku kovarijaciju jedne varijable s pomoću dviju ili više varijabli.

Opći oblik modela višestruke linearne regresije je:

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_j x_{ij} + e \quad (2.72.)$$

Jednadžba pravca, odnosno funkcija regresijskog modela je određena ako su poznati parametri α i $\beta_j, j = 1, 2, \dots, K$. No oni su nepoznati i njih procjenjujemo i tada procijenjeni regresijski model glasi

$$\hat{y}_i = a + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \dots + b_j x_{ij} + b_K x_{iK} \quad (2.73.)$$

Procjena parametra a naziva se konstantnim članom. To je vrijednost regresijske funkcije uzorka ako su vrijednosti K nezavisnih varijabli jednake nuli.

$b_j, j = 1, 2, \dots, K$ su *regresijski koeficijenti*. Regresijski koeficijent b_j pokazuje za koliko se linearno u prosjeku mijenja vrijednost zavisne varijable Y ako se varijabla X_j poveća za jedan, a vrijednosti preostalih nezavisnih varijabli ostanu nepromijenjene. Također se mogu tumačiti kao parcijalne derivacije regresijske funkcije uzorka po regresorskim varijablama:

$$\frac{\sigma \hat{y}}{\sigma x_j} = b_j, j = 1, 2, \dots, K \quad (2.74.)$$

2.10. Analiza varijance – ANOVA

Analiza varijance je postupak usporedbe više uzoraka pri čemu svaki uzorak predstavlja zasebni osnovni skup, odnosno populaciju. U proizvodnim uvjetima analiza varijance je postupak koji se koristi u provjeri djelovanja promjene stanja nekog proizvodnog faktora na mjerenu vrijednost – rezultat. Analizom varijance provjeravaju se promjene aritmetičkih sredina uzoraka.

2.10.1 ANOVA s jednim utjecajnim faktorom

Primjena analize varijance je moguća ako je mjerena varijabla normalno distribuirana i ako su varijance svih promatranih uzoraka jednake. Ideja analize varijance sastoji se u razdvajanju varijabilnosti mjerenog varijancom na dva dijela: varijabilnost među uzorcima i varijabilnost unutar uzorka. Ovaj drugi dio varijabilnosti često se naziva rezidualnom varijabilnošću. Test se temelji na omjeru tih dviju varijabilnosti.

Prikazani je model za ANOVU s jednim utjecajnim faktorom [4]:

$$x_{ij} = \mu + \Delta \bar{x}_j + \varepsilon_{ij} \quad (2.75.)$$

$x_{ij} \rightarrow$ vrijednost i – tog mjerenja u j – tom stupcu

$\mu \rightarrow$ aritmetička sredina svih podataka

$\Delta \bar{x}_j \rightarrow$ doprinos ar. sredine j – tog uzorka

$\varepsilon_{ij} \rightarrow$ slučajno odstupanje unutar uzorka

Pretpostavka:

$$\varepsilon_{ij} \rightarrow N \left\{ E(\varepsilon_{ij}) = 0; \sigma_{(\varepsilon_{ij})}^2 \right\} \quad (2.76.)$$

Tablica 7. Prikaz podataka za ANOVU [4]

Redni broj mjerenja	Uzorci						
1	1	2	3	...	j	...	k
2	x ₁₁	x ₂₁			...		x _{k1}
3	x ₁₁	...					
⋮	⋮				...		
i	x _{ij}		
⋮							
n _j							
$\sum_{i=1}^{n_j} x_j$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_1$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_2$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_j$		$\sum_{i=1}^{n_j} x_k$
\bar{x}_j	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_j		\bar{x}_k

Model se može shvatiti i kao [4] :

$$x_{ij} = \bar{x}_j + \varepsilon_{ij} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n_j \\ j = 1, 2, \dots, k \end{matrix} \right) \quad (2.77.)$$

Pretpostavljene hipoteze su:

$$H_0: \Delta \bar{x}_1 = \Delta \bar{x}_2 = \dots = \Delta \bar{x}_k = 0$$

$$H_1: \text{bar jedan } \Delta \bar{x}_j \neq 0$$

Za provjeru gornje hipoteze H_0 nužno je odrediti dvije nezavisne varijance kako bi se formirao F test.

Varijance se određuju sljedećim postupkom:

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_j + \dots + n_k \quad , \quad \text{ukupni broj podataka}$$

$$\sigma_0^2 \cong s^2 = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \mu)^2}{N - 1} \quad \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \rightarrow \sum_{i,j} \quad (2.78.)$$

$$\begin{aligned}
(N-1) \cdot s^2 &= (x_{ij} - \bar{x}_j) \left(\sum_{i,j} (x_{ij} - \mu) \right)^2 & (2.79.) \\
&= \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_j + \bar{x}_j - \mu)^2 \\
&= \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{i,j} (\bar{x}_j - \mu)^2 + 2 \sum_{i,j} \bar{x}_j - \mu
\end{aligned}$$

Konačan izraz glasi:

$$\sum_{i,j} (x_{ij} - \mu)^2 = \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{i,j} (\bar{x}_j - \mu)^2 \quad (2.80.)$$

$$SKO_{UKUPNO} = SKO_{unutar uzorka} + SKO_{između uzoraka} \quad (2.81.)$$

$$s_{ukupno}^2 = s_{unutar uzorka}^2 + s_{između uzoraka}^2 \quad (2.82.)$$

Kada imamo dvije nezavisne varijance možemo provesti F test. Test veličina će biti

$$F = \frac{s_{između uzoraka}^2}{s_{unutar uzorka}^2} \quad (2.83.)$$

Koja se ponaša po F razdiobi s ($k_b = n_1 - 1, k_n = n_2 - 1$) stupnjeva slobode. Odluka se donosi usporedbom test – veličine F s teorijskom vrijednošću F_0 . Nulta hipoteza se prihvaća ukoliko je $F \leq F_0$, a ne prihvaća ukoliko je $F > F_0$ uz razinu vjerodostojnosti α .

ANOVA tablica za izračunavanje varijable F:

Tablica 8. ANOVA s jednim utjecajnim faktorom [4]

Izvor varijacije	Suma kvadrata odstupanja	Stupnjevi slobode	Srednji kvadrat odstupanja	F
Između uzoraka (faktor)	SKO _{između}	k-1	$s_{između}^2$	$s_{između}^2 / s_{ostatak}^2$
Unutar uzoraka (ostatak)	SKO _{ostatak}	N-k	$s_{ostatak}^2$	-
UKUPNO	SKO _{ukupno}	N-1	-	-

2.10.2. ANOVA s dva utjecajna faktora

ANOVA s dva utjecajna faktora koristi se kada želimo provjeriti djelovanja promjene stanja dva proizvodna faktora na mjerenu vrijednost – rezultat.

Model analize varijance s dva promjenjiva faktora [4]:

$$x_{ij} = \mu + \Delta\bar{x}_j + \Delta\bar{x}_i + \varepsilon_{ij} \quad (2.84.)$$

$x_{ij} \rightarrow$ vrijednost i – tom retku i j – tom stupcu

$\mu \rightarrow$ aritmetička sredina svih podataka

$\Delta\bar{x}_j \rightarrow$ doprinos ar.sredine j – tog stupca

$\Delta\bar{x}_i \rightarrow$ doprinos ar.sredine i – tog stupca

$\varepsilon_{ij} \rightarrow$ slučajno odstupanje (ostatak)

Pretpostavka:

$$\varepsilon_{ij} \rightarrow N \left\{ E(\varepsilon_{ij}) = 0; \sigma_{(\varepsilon_{ij})}^2 \right\} \quad (2.85.)$$

U ovom slučaju formiraju se dva F testa:

F - test (po redovima)

$$H_0: \Delta\bar{x}_1 = \Delta\bar{x}_i = \dots = \Delta\bar{x}_k = 0$$

$$H_1: \text{bar jedan } \Delta\bar{x}_i \neq 0$$

F - test (po stupcima)

$$H_0: \Delta\bar{x}_1 = \Delta\bar{x}_j = \dots = \Delta\bar{x}_k = 0$$

$$H_1: \text{bar jedan } \Delta\bar{x}_j \neq 0$$

Izraz, odnosno dekompozicija sume kvadrata odstupanja glasi:

$$\sum_{i,j} (x_{ij} - \mu)^2 = \sum_{i,j} (x_j - \mu)^2 + \sum_{i,j} (\bar{x}_i - \mu)^2 + SKO_{ostatka} \quad (2.86.)$$

$$SKO_{UKUPNO} = SKO_{stupci} + SKO_{redovi} + SKO_{ostatka} \quad (2.87.)$$

$$s_{ukupno}^2 = s_{stupci}^2 + s_{redovi}^2 + s_{ostatka}^2 \quad (2.88.)$$

Tablica 9. ANOVA s dva utjecajna faktora [4]

Izvor varijacije	Suma kvadrata odstupanja	Stupnjevi slobode	Srednji kvadrat odstupanja	F
Faktor 1 (redovi)	SKOredovi	l-1	S_{redovi}^2	$S_{redovi}^2/S_{ostatak}^2$
Faktor 2 (stupci)	SKOstupci	k-1	S_{stupci}^2	$S_{stupci}^2/S_{ostatak}^2$
Ostatak	SKOostatak	(k-1)(l-1)	$S_{ostatak}^2$	-
UKUPNO	SKOukupno	N-1	-	-

Odluka se donosi usporedbom test – veličina F s teorijskom vrijednošću F_0 . Nulte hipoteze se prihvaćaju ukoliko je $F \leq F_0$, a ne prihvaćaju ukoliko je $F > F_0$ uz razinu vjerodostojnosti α .

3. Primjena nekih spomenutih metoda inferencijalne statistike na realnim primjerima te tumačenje dobivenih rezultata

3.1. Primjer 1- testiranje adekvatnosti modela uporabom testova na ostacima (rezidualnim vrijednostima)

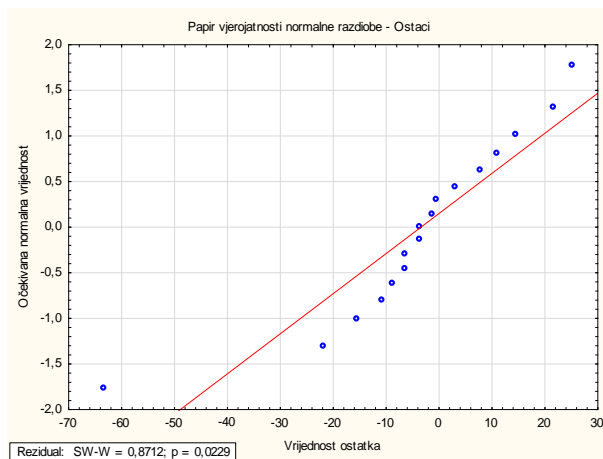
Toplinskom analizom taljevine nodularnog lijeva pomoću neuronskih mreža predviđala su se mehanička svojstva nodularnog lijeva. U tablici 10 su dane predviđene vrijednosti O_i i izmjerene vrijednosti d_i vlačne čvrstoće R_m . Vrijednosti d_i su izmjerene Testom vlačne čvrstoće u kojem su korišteni standardiziran ispitni uzorci (epruvete). [7]

Tablica 10. Predviđene i izmjerene vrijednosti R_m i ostaci

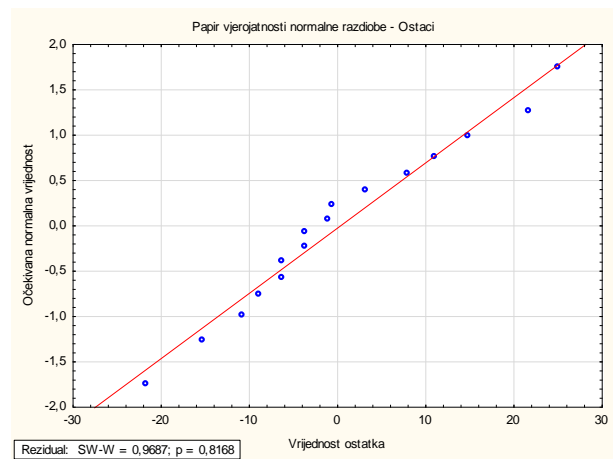
Taljevina br.	Izmjereno d_i	Predviđeno O_i	$ d_i - O_i $
1	512	518,23	6,23
2	549	549,61	0,61
3	517	502,27	14,73
4	493	503,87	10,87
5	488	491,65	3,65
6	490	486,70	3,30
7	507	485,33	21,67
8	499	490,99	8,01
9	517	518,12	1,12
10	496	485,04	10,96
11	518	521,60	3,60
12	436	499,15	63,15
13	488	494,37	6,37
14	461	482,71	21,71
15	503	477,88	25,12
16	478	486,89	8,89
17	596	611,37	15,37

Analiza ostataka (reziduala), odnosno razlike između izmjerenih i predviđenih vrijednosti vlačne čvrstoće R_m učinjena je pomoću Shapiro–Wilk testa normalnosti i prikazana pomoću papira vjerojatnosti normalne razdiobe.

Prva analiza je obuhvatila sve vrijednosti ostataka, dok je druga analiza zanemarila vrijednost ekstrema ostatka taljevine br. 12 koja vidno odskače od ostalih podataka.



a)



b)

Slika 15. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe a) sa svim vrijednostima i b) bez ekstrema

Ako se ostaci distribuiraju po normalnoj razdiobi, to znači da su razlike između predviđenih i izmjerenih vrijednosti vlačne čvrstoće slučajne prirode, tj. da je model koji se koristio adekvatan za procjenu vrijednosti. Usporedbom prikazanih grafova i podataka vidi se da se bez ekstremne vrijednosti predviđene i izmjerene vlačne čvrstoće ostaci (reziduali) ponašaju po normalnoj razdiobi uz zanemarive razlike, dok analiza svih podataka pokazuje određeno odstupanje razdiobe ostataka od normalne razdiobe. Ovu tvrdnju može se potvrditi i uporabom statističkog testa normalnosti (Shapiro – Wilko) koji pokazuje da se u prvom slučaju radi o značajnim odstupanjima od normalnosti dok su u drugom razlike zanemarive.

Zatim je provedena usporedba regresijskih modela:

Korelacijom i regresijskom analizom želimo utvrditi postoji li korelacija između predviđenih i izmjerenih vrijednosti vlačne čvrstoće R_m .

Korelacija i regresijska analiza svih rezultata:

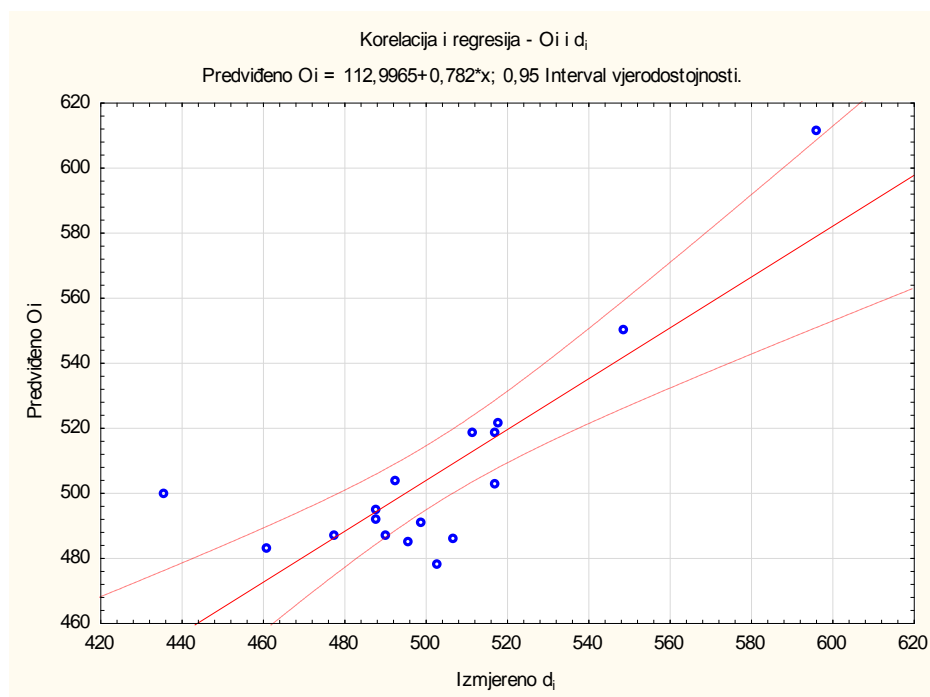
Zavisna varijabla	Korelacija i regresija- predviđeni i izmjereni rezultati R_m - sve vrijednosti										
	Koeficijent korelacije R	Koeficijent determinacije R ²	Prilagođeni koeficijent determinacije R ²	SS Model	df Model	MS Model	SS Residual	df Residual	MS Residual	F	p
Predviđeno O_i	0,82706	0,68404	0,66297	11705,5	1	11705,5	5406,95	15	360,463	32,4743	0,00004

Slika 16. Koeficijenti korelacije i determinacije – predviđeni i izmjereni R_m - svi rezultati

Koeficijent korelacije $r = 0,82767$ pokazuje kako postoji visoka pozitivna korelacija između izmjerenih i predviđenih vrijednosti vlačne čvrstoće R_m .

	Koeficijenti regresijskog pravca između predviđenih i izmjerenih vrijednosti R_m - svi rezultati									
Effect	Predviđeno Param.	Predviđeno Std.Err	Predviđeno t	Predviđeno p	-95,00' Cnf.Lm	+95,00' Cnf.Lm	Predviđeno Beta (β)	Predviđeno St.Err. β	-95,00' Cnf.Lm	+95,00' Cnf.Lm
Intercept	112,99	69,157	1,6339	0,1230	-34,40	260,40				
Izmjereno c	0.782	0.1372	5.6986	0.0000	0.485	1.074	0.8270	0.1451	0.5177	1.1364

Slika 17. Tablični prikaz podataka regresijske analize predviđenih i izmjerenih R_m –svi rezultati



Slika 18. Graf linearne regresije predviđenih i izmjerenih R_m - svi rezultati

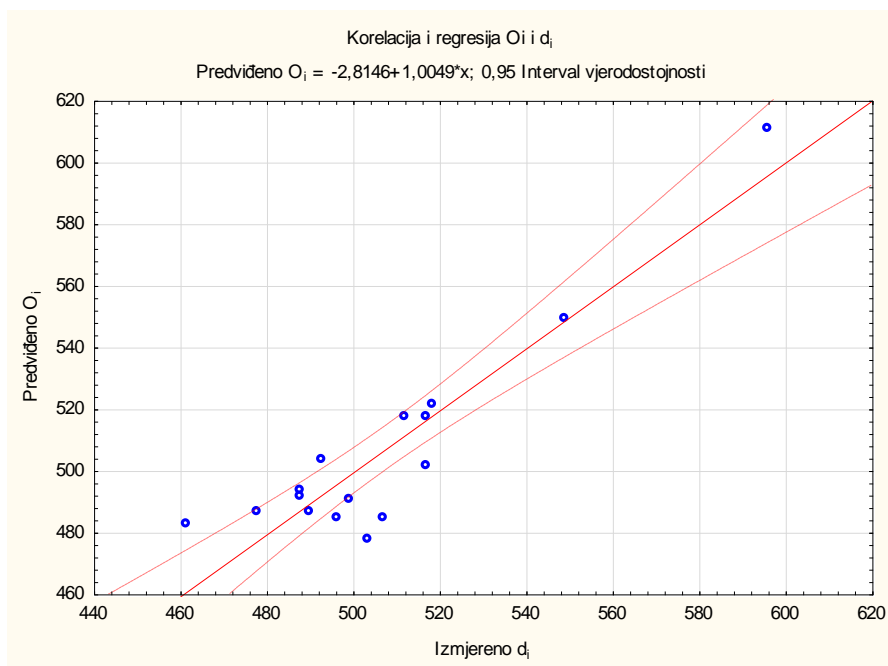
Korelacija i regresijska analiza bez ekstremne vrijednosti

	Korelacija i regresija - predviđeni i izmjereni rezultati R_m - bez ekstrema										
	Koeficijent korelacije R	Koeficijent determinacij R^2	Prilagođeni koeficijent determinacij R^2	SS Model	df Model	MS Model	SS Residua	df Residua	MS Residua	F	p
Zavisna varijabla											
Predviđeno, O_i	0,92310	0,85212	0,84156	14537,1	1	14537,1	2522,6	14	180,18	80,676	0,0000

Slika 19. Koeficijenti korelacije i determinacije – predviđeni i izmjereni R_m - bez ekstrema

Effect	Koeficijenti regresijskog pravca između predviđenih i izmjerenih vrijednosti R_m - bez ekstrema									
	Predviđeno, C Param.	Predviđeno, C Std. Err.	Predviđeno, C t	Predviđeno, C p	-95,00% Cnf. Lm	+95,00% Cnf. Lm	Predviđeno, C Beta (β)	Predviđeno, C St. Err. β	-95,00% Cnf. Lm	+95,00% Cnf. Lm
Intercept	-2,8146	56,8211	-0,04953	0,98119	-124,68	119,054				
Izmjereno d_i	1,0048	0,1118	8,98203	0,00000	0,76	1,244	0,92310	0,10277	0,70268	1,14353

Slika 20. Tablični prikaz podataka regresijske analize predviđenih i izmjerenih R_m –bez ekstrema



Slika 21. Graf linearne regresije predviđenih i izmjerenih R_m - bez ekstrema

Koeficijent determinacije u regresijskom modelu sa svih 17 vrijednosti iznosi $r^2 = 0,684040$, dok u regresijskom modelu bez ekstrema iznosi $r^2 = 0,85213$. Zaključak iz prikazanih podataka korelacije i regresije je da se pravilnom uporabom statističkih metoda i pomnijom analizom izabranog uzorka može dobiti poboljšani model koji kvalitetnije i točnije opisuje promatranu pojavu (proces), tj. potvrđuje korelaciju predviđenih i izmjerenih vrijednosti vlačne čvrstoće R_m .

3.2. Primjer 2 - regresijska analiza:

Za ovaj primjer uzeti su podaci o toplinskoj analizi taljevine nodularnog lijeva te opisivanje značajki procesa pomoću neuronskih mreža. Rezultat neuronskih mreža je model koji predviđa mehanička svojstva na temelju analiziranog kemijskog sastava taljevine. [7]

Tablica 11., Predviđene vrijednosti R_m i HB

Taljevina br.	R_m	HB
1	518,23	165,79
2	549,61	168,6
3	502,27	162,74
4	503,87	166,31
5	491,65	162,78
6	486,7	158,94
7	485,33	158,8
8	490,99	161,8
9	518,12	161,55
10	485,04	162,86
11	521,6	168,54
12	499,15	163,83
13	494,37	161,74
14	482,71	158,57
15	477,88	159,6
16	486,89	160,5
17	611,37	172,83

Tablica 12. Izmjerene vrijednosti R_m i HB

Taljevina br.	R_m	HB
1	512	165
2	549	174
3	517	163
4	493	159
5	488	159
6	490	152
7	507	165
8	499	170
9	517	159
10	496	156
11	518	170
12	436	167
13	488	152
14	461	149
15	503	159
16	478	154
17	596	199

U tablici 11. prikazane su predviđene vrijednosti (vrijednosti dobivene kao rezultat neuronske mreže) vlačne čvrstoće R_m nodularnog lijeva i tvrdoće lijeva HB dok su u tablici 12 prikazane izmjerene vrijednosti (originalni podaci) vlačne čvrstoće R_m nodularnog lijeva i tvrdoće HB . Provedena je korelacija i regresijska analiza na predviđenim rezultatima kao i na izmjerenim rezultatima.

3.2.1 Korelacijska i regresijska analiza predviđenih rezultata:

U ovom primjeru tvrdoća HB je posljedica vlačne čvrstoće R_m , odnosno HB je zavisna varijabla koju opisujemo preko varijable R_m .

	Korelacija i regresija HB i Rm - predviđeni rezultati										
	Koeficijent korelacije R	Koeficijent determinacije R ²	Prilagođen koeficijent determinacije R ²	SS Model	df Model	MS Model	SS Residual	df Residual	MS Residual	F	p
Zavisna varijabla HB	0,873966	0,763816	0,748011	193,691	1	193,691	59,8931	15	3,99287	48,5098	0,000000

Slika 22. Koeficijenti korelacije i determinacije R_m i HB – predviđeni rezultati

Koeficijent korelacije $r = 0,873966$ pokazuje kako postoji visoka pozitivna korelacija između tvrdoće HB i vlačne čvrstoće R_m , dok koeficijent determinacije $r^2 = 0,763816$ pokazuje da je veliki udio promjene zavisne varijable HB opisan promjenom nezavisne varijable R_m .

Effect	Koeficijenti regresijskog pravca između HB i Rm - predviđeni rezultati									
	HB Param.	HB Std.Err	HB t	HB p	-95,00% Cnf.Lmt	+95,00% Cnf.Lmt	HB Beta (β)	HB St.Err.β	-95,00% Cnf.Lmt	+95,00% Cnf.Lmt
Intercept	109,424	7,74775	14,1233	0,00000	92,9105	125,938				
Rm	0,106	0,01527	6,9649	0,00000	0,0738	0,1381	0,873966	0,12548	0,60650	1,14142

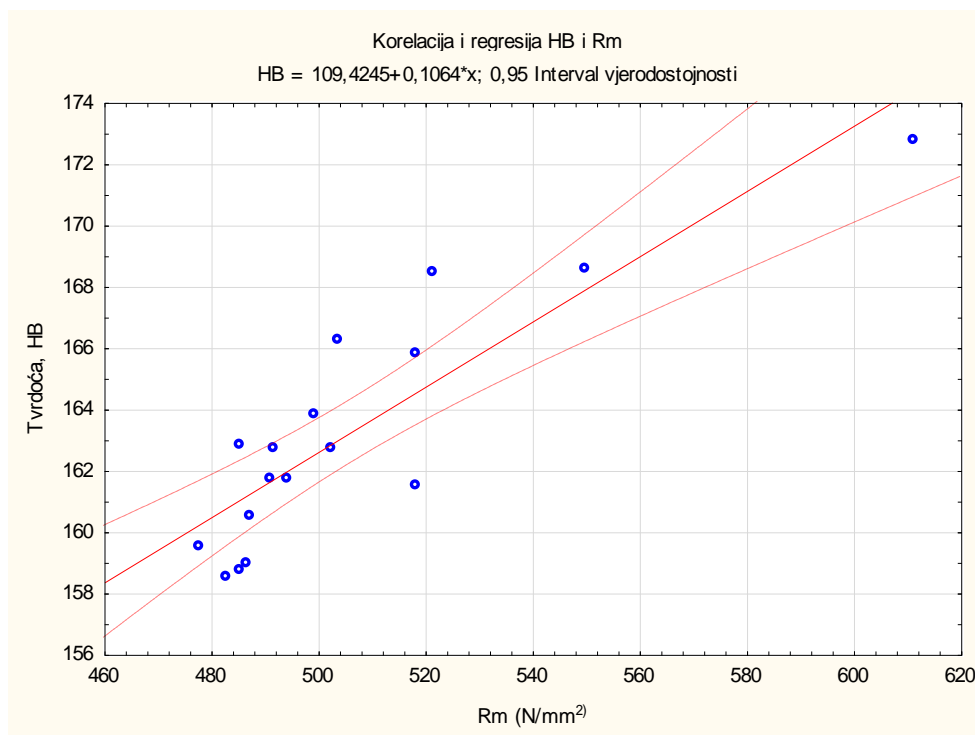
Slika 23. Tablični prikaz podataka regresijske analize R_m i HB - predviđeni rezultati

Koeficijenti regresijskog pravca su: $b = 109,4245$ i $a = 0,1064$

tako da regresijski model na razini uzorka s procijenjenim parametrima glasi:

$$\hat{y} = 109,4245 + 0,1064x \quad (3.1.)$$

Iz tabličnog prikaza na slici 19. vide se granice intervala za procjenu koeficijenata α i β koji opisuju zavisnost tvrdoće HB o vlačnoj čvrstoći R_m na razini modela neuronskih mreža uz razinu vjerodostojnosti $1 - \alpha = 0,95$.



Slika 24. Graf linearne regresije R_m i HB – predviđeni rezultati

3.2.2 Korelacija i regresijska analiza izmjerenih rezultata:

	Korelacija i regresija HB i Rm - izmjereni rezultati										
	Koeficijent korelacije R	Koeficijent determinacije R ²	Prilagođeni koeficijent determinacije R ²	SS Model	df Model	MS Model	SS Residual	df Residual	MS Residual	F	p
Zavisna varijabla											
HB	0,760637	0,578568	0,55041	1256,03	1	1256,03	914,904	15	60,9936	20,5925	0,00035

Slika 25. Koeficijenti korelacije i determinacije R_m i HB – izmjereni rezultati

Koeficijent korelacije $r = 0,760637$ pokazuje kako postoji izvjesna pozitivna korelacija između tvrdoće HB i vlačne čvrstoće R_m , dok koeficijent determinacije $r^2 = 0,578568$ pokazuje da je udio promjene zavisne varijable HB opisan promjenom nezavisne varijable R_m nešto manji nego u modelu s predviđenim rezultatima (r^2 je u tom slučaju bio 0,763816).

Koeficijenti regresijskog pravca između HB i Rm - izmjereni rezultati										
Effect	HB Param.	HB Std.Err	HB t	HB p	-95,00% Cnf.Lmt	+95,00% Cnf.Lmt	HB Beta (β)	HB St.Err.β	-95,00% Cnf.Lmt	+95,00% Cnf.Lmt
Intercept	34,2515	28,4476	1,20401	0,24723	-26,383	94,8862				
Rm	0,2561	0,0564	4,53794	0,00039	0,135	0,3764	0,76063	0,16761	0,40336	1,11790

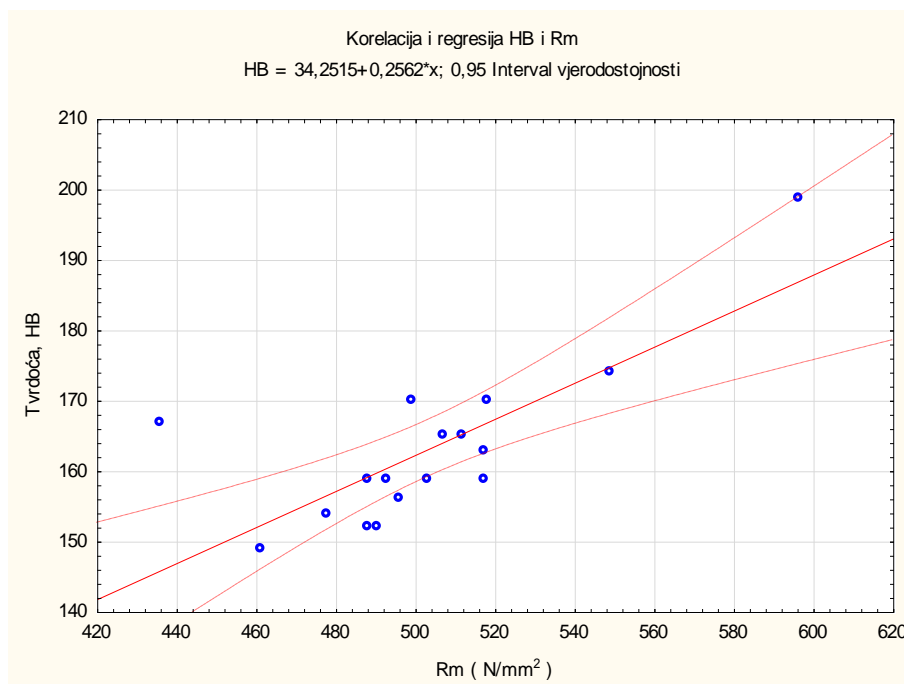
Slika 26. Tablični prikaz podataka regresijske analize R_m i HB - izmjereni rezultati

Koeficijenti regresijskog pravca su: $b = 34,25152$ i $a = 0,25617$

tako da regresijski model na razini uzorka s procijenjenim parametrima glasi:

$$\hat{y} = 34,25152 + 0,25617x \quad (3.2.)$$

Iz tabličnog prikaza na slici 21. vide se granice intervala za procjenu koeficijenata α i β koji opisuju zavisnost tvrdoće HB o vlačnoj čvrstoći R_m na razini modela neuronskih mreža uz razinu vjerodostojnosti $1 - \alpha = 0,95$.

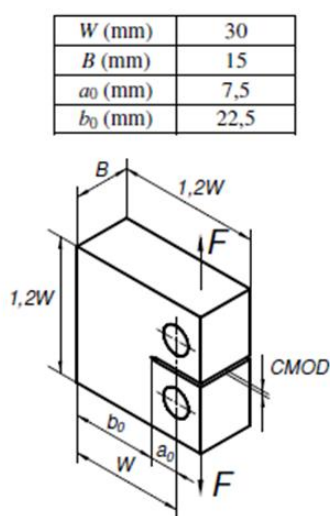


Slika 27. Graf linearne regresije R_m i HB – izmjereni rezultati

Usporedbom regresijskih modela; stvarnih i predviđenih neuronskom mrežom vidimo kako razlike nisu velike što pokazuje da sama statistička metoda potvrđuje da je metoda analize neuronskih mreža adekvatna te da se i nakon formiranog modela nije izgubila korelacija koja postoji u stvarnom procesu, naravno, u pogledu ovisnosti značajki materijala R_m i HB .

3.3. Primjer 3 - uporaba analize varijance s 2 promjenjiva faktora

Ovaj primjer se odnosi na testiranje značajnosti postignutih vrijednosti mehaničkih značajki kod nodularnog lijeva različitih serija materijala i omjera opterećenja uporabom analize varijance s dva promjenjiva faktora. Pomoću epruveta prikazanih na slici 27. ispitivane su zamorne karakteristike nodularnog lijeva **EN-GJS-400-18-LT** ; ΔK_{th} - granična vrijednost raspona koeficijenta intenzivnosti naprezanja $[MPa\sqrt{m}]$ i ΔK_c – granična lomna žilavost materijala $[MPa\sqrt{m}]$. [8]



Slika 28. Dimenzije testne epruvete

U ispitivanju primjenjivala su se četiri različita odnosa opterećenja R i korištene su četiri različite serije materijala. Potrebno je provjeriti da li ovi promjenjivi faktori značajno utječu na raspon koeficijenta intenzivnosti naprezanja.

Tablica 13. Izmjerene vrijednosti ΔK_{th} , u $MPa\sqrt{m}$

[N]	Omjer opterećenja R		
Seriya materijala	R1 = 0,1	R2 = 0,3	R1 = 0,5
Nestand.	20,8	16,1	11,5
Flotret	20,7	16,0	11,5
Tundish	20,8	16,2	11,5
Inmould	20,6	16,2	11,6

Primjenom analize varijance s 2 promjenjiva faktora želi se utvrditi da li promjena istih značajno utječe na granični vrijednost raspona koeficijenta intenzivnosti naprezanja ΔK_{th} .

Formiraju se dva para hipoteza:

1)

$H_{0...}$ serija materijala značajno utječe na ΔK_{th}

$H_{1...}$ serija materijala značajno ne utječe na ΔK_{th}

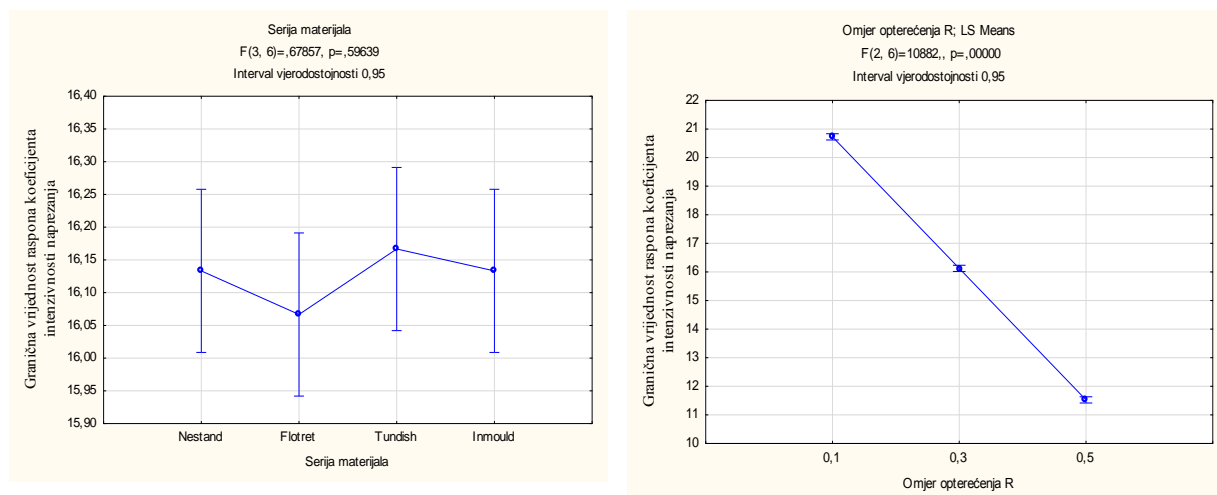
2)

$H_{0...}$ omjer opterećenja R značajno utječe na ΔK_{th}

$H_{1...}$ omjer opterećenja R značajno ne utječe na ΔK_{th}

Izvor varijacije	ANOVA Tablica, 2 promjenjiva faktora				
	Degr. of Freedom	Granična vrijednost raspona koeficijenta intenzivnosti naprezanja SS	Granična vrijednost raspona koeficijenta intenzivnosti naprezanja MS	Granična vrijednost raspona koeficijenta intenzivnosti naprezanja F	Granična vrijednost raspona koeficijenta intenzivnosti naprezanja p
Seriya materijala	3	0,016	0,005	0,7	0,596394
Omjer opterećenja R	2	169,280	84,640	10882,3	0,000000
Ostatak	6	0,047	0,008		
Ukupno	11	169,343			

Slika 29. Tablični prikaz rezultata ANOVA-e



Slika 30. „Box – whisker“ prikaz ovisnosti ΔK_{th} o promjenjivim faktorima

Na temelju promatranja i analize podataka dobivenih pomoću testnih epruveta (uzoraka), možemo donijeti zaključke koje se odnose na nodularni ljev **EN-GJS-400-18-LT** (osnovni skup). Iz prikazanih rezultata metode ANOVA-e i „Box – whisker“ prikaza vidi se kako je „p-vrijednost“ za promjenjivi faktor omjera opterećenja R : $p < 0,05$, što govori kako omjer opterećenja *značajno utječe* na graničnu vrijednost raspona koeficijenta intenzivnosti naprezanja ΔK_{th} .

Vrijednost „p“ za promjenjivi faktor serije materijala: $p = 0,596394$ je veća od 0,05 što govori kako serija materijala *značajno ne utječe* na graničnu vrijednost raspona koeficijenta intenzivnosti naprezanja ΔK_{th} .

Analogno s prethodnom statističkom analizom (analizom varijance s 2 promjenjiva faktora), provjerava se utjecaj promjenjivih faktora odnosa opterećenja R i serije materijala na graničnu lomnu žilavost materijala ΔK_c

Tablica 14. Izmjerene vrijednosti ΔK_c , u $MPa\sqrt{m}$

[N]	Omjer opterećenja R		
Seriya materijala	$R1 = 0,1$	$R2 = 0,3$	$R1 = 0,5$
Nestand.	27,6	21,3	15
Flotret	27,5	21,4	14,4
Tundish	30,2	21,5	14,6
Inmould	28,7	25,1	14,7

Formiraju se dva para hipoteza:

1)

$H_{0...}$ serija materijala značajno utječe na ΔK_c

$H_{1...}$ serija materijala značajno ne utječe na ΔK_c

2)

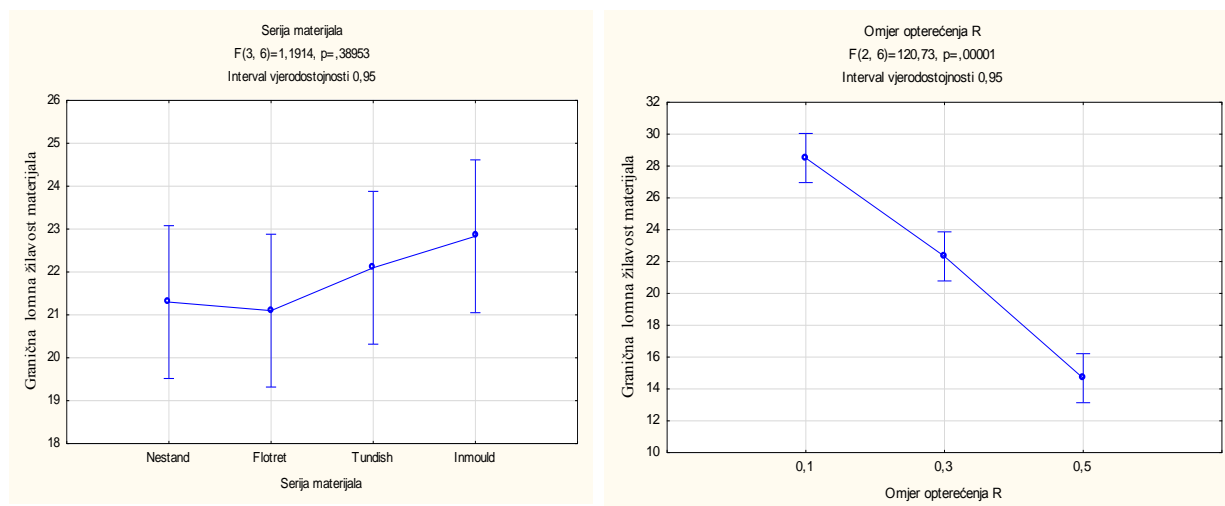
$H_{0...}$ omjer opterećenja R značajno utječe na ΔK_c

$H_{1...}$ omjer opterećenja R značajno ne utječe na ΔK_c

Primjenom analize varijance s 2 promjenjiva faktora dobiveni su sljedeći rezultati:

Izvor varijacije	ANOVA Tablica, 2 promjenjiva faktora				
	Degr. of Freedom	Granična granična lomna žilavost materijala SS	Granična granična lomna žilavost materijala MS	Granična granična lomna žilavost materijala F	Granična granična lomna žilavost materijala p
Seriya materijala	3	5,680	1,893	1,191	0,389528
Omjer opterećenja R	2	383,712	191,856	120,727	0,000014
Ostatak	6	9,535	1,589		
Ukupno	11	398,927			

Slika 31. Tablični prikaz rezultata ANOVA-e



Slika 32. „Box – whisker“ prikaz ovisnosti ΔK_c o promjenjivim faktorima

Iz prikazanih rezultata metode ANOVA-e i „Box – whisker“ prikaza vidi se kako je „p-vrijednost“ za promjenjivi faktor omjera opterećenja R: $p < 0,05$ što pokazuje kako omjer opterećenja *značajno utječe* na graničnu lomnu žilavost ΔK_c . Vrijednost „p“ za promjenjivi faktor serije materijala: $p = 0,38953$ je veća od 0,05 što pokazuje kako serija materijala *značajno ne utječe* na graničnu lomnu žilavost ΔK_c .

3.4. Primjer 4 - analiza varijance u analizi utjecaja na trošenje reznih pločica s zaštitnim prevlakama

3.4.1. Testiranje vremena trajanja alata „t“

Testirano je vrijeme trajanja rezne pločice za tokarenje. U obzir su uzeta 2 promjenjiva faktora: *broj serije* te *vrsta zaštitne prevlake*.

Tablica 15. Vrijeme trajanja alata t, min

Broj serije	P0	DH0	P1	DH1
1	13,65	14,83	15	15
2	4,23	6,77	1,82	3,89
3	7,86	14,2	4,06	9,66
4	5,64	9,81	9,56	12,43
5	15	15	10,3	9,23
\bar{X}	9,28	12,12	8,15	10,04

U tablici 15 su navedeni podaci o vremenima trajanja reznih pločica s različitim zaštitnim prevlakama pri kontinuiranom ispitivanju trošenja do $t_{max} = 15 \text{ min}$ [9]. Primjenom analize varijance s 2 promjenjiva faktora želi se utvrditi da li promjena istih značajno utječe na vrijeme trajanja alata „t“.

Formiraju se dva para hipoteza:

1)

$H_0...$ broj serije značajno utječe na vrijeme trajanja alata "t"

$H_1...$ broj serije značajno ne utječe vrijeme trajanja alata "t"

2)

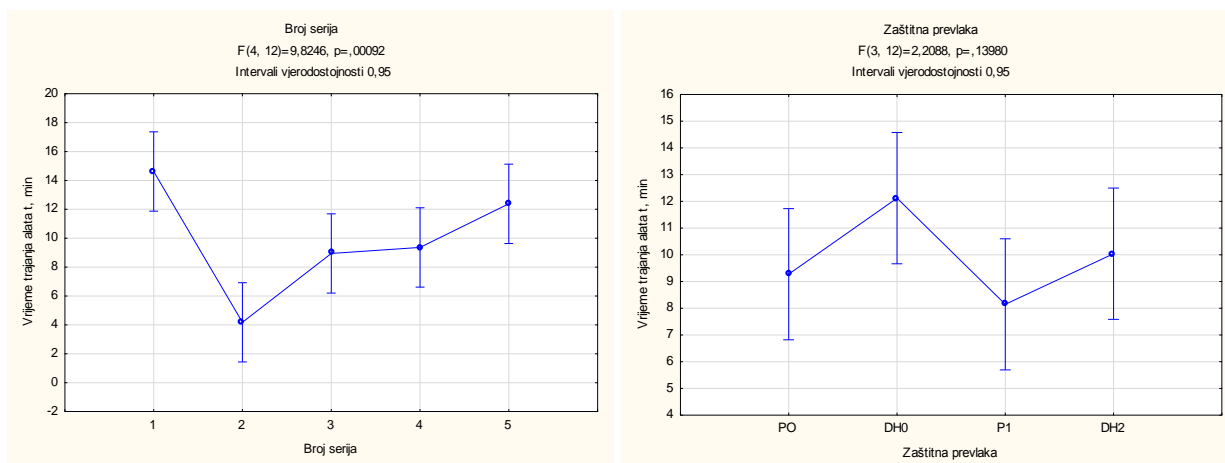
$H_0...$ vrsta zaštitne prevlake značajno utječe na vrijeme trajanja alata "t"

$H_1...$ vrsta zaštitne prevlake značajno ne utječe na vrijeme trajanja alata "t"

Dobiveni su sljedeći podaci:

Izvor varijacije	ANOVA tablica, 2 promjenjiva faktora				
	Degr. of Freedom	Vrijeme trajanja alata t min SS	Vrijeme trajanja alata t min MS	Vrijeme trajanja alata t min F	Vrijeme trajanja alata t min p
Broj serija	4	249,567	62,392	9,8246	0,000917
Zaštitna prevlaka	3	42,081	14,027	2,2088	0,139804
Ostatak	12	76,207	6,351		
Ukupno	19	367,855			

Slika 33. Tablični prikaz rezultata ANOVA-e



Slika 34. „Box – whisker“ prikaz ovisnosti vremena trajanja alata „t“ o promjenjivim faktorima

Primjenom metode analize varijance na uzorku možemo donijeti zaključke koji se odnose na čitav osnovni skup, odnosno na daljnju eksploataciju alatnih pločica. Iz prikazanih rezultata metode ANOVA-e i „Box – whisker“ prikaza vidi se kako je „p-vrijednost“ za promjenjivi faktor broja serije: $p < 0,05$ što govori kako broj serije *značajno utječe* na vrijeme trajanja alata „t“. Vrijednost „p“ za promjenjivi faktor zaštitne prevlake: $p = 0,13980$ je veća od 0,05 što pokazuje kako promjena vrste zaštitne prevlake *značajno ne utječe* na vrijeme trajanja alata „t“.

3.4.2. Testiranje vrijednosti trošenja alata VB

Također je testirano trošenje stražnje površine rezne pločice za tokarenje VB, mm pri kontinuiranom ispitivanju trošenja do $t_{max} = 15 \text{ min}$. U tablici 16 prikazane su vrijednosti trošenja VB, mm u odnosu na broj serije i različite zaštitne prevlake.

Tablica 16. Trošenje stražnje površine VB, mm

Broj serije	P2	DH2	P3	DH3
1	0,247	0,647	0,467	0,509
2	2,726	0,941	0,705	0,57
3	0,901	0,453	0,481	0,87
4	0,837	0,727	0,444	0,569
5	3,249	0,754	0,538	0,448
\bar{X}	1,592	0,704	0,527	0,593

Primjenom analize varijance s 2 promjenjiva faktora želi se utvrditi da li promjena broja serije i zaštitne prevlake značajno utječe na vrijednost trošenja alata VB. Formiraju se dva para hipoteza:

1)

$H_{0...}$ broj serije značajno utječe na vrijednost trošenja alata VB

$H_{1...}$ broj serije značajno ne utječe na vrijednost trošenja alata VB

2)

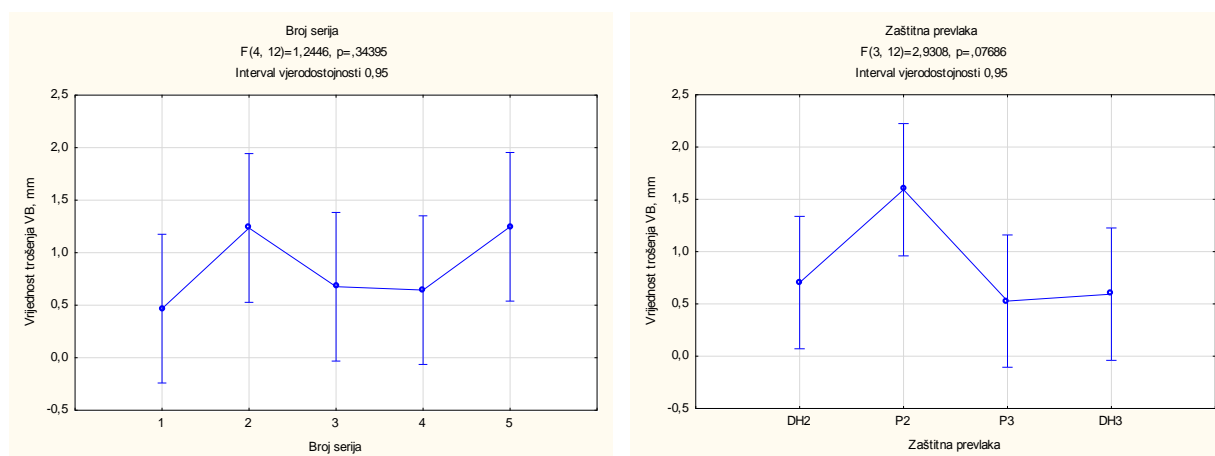
$H_{0...}$ vrsta zaštitne prevlake značajno utječe na vrijednost trošenja alata VB

$H_{1...}$ vrsta zaštitne prevlake značajno ne utječe na vrijednost trošenja alata VB

Dobiveni su sljedeći podaci:

Izvor varijacije	ANOVA tablica, 2 promjenjiva faktora				
	Degr. of Freedom	Vrijednost trošenja VB, mm SS	Vrijednost trošenja VB, mm MS	Vrijednost trošenja VB, mm F	Vrijednost trošenja VB, mm p
Broj serija	4	2,10064	0,52516	1,24464	0,343948
Zaštitna prevlaka	3	3,70985	1,23662	2,93079	0,076858
Ostatak	12	5,06327	0,42194		
Ukupno	19	10,87376			

Slika 35. Tablični prikaz rezultata ANOVA



Slika 36. „Box – whisker“ prikaz ovisnosti trošenja alata VB o promjenjivim faktorima

Kao i prethodni promatrani parametar, pomoću „Box- whisker“ prikaza prikazana je vrijednost trošenja alatnih pločica VB u ovisnosti o broju serija i vrsti zaštitne prevlake. Analizom podataka „Box – whisker „ prikaza i podataka dobivenim analizom varijance može se zaključiti kako promjena vrste prevlake *ne utječe značajno* na vrijednost trošenja alata VB ($p = 0,076858 > 0,05$) iako se gledajući samo parametar aritmetičke sredine tako ne čini. To upućuje na korisnost primjene statističkih metoda pri donošenju zaključaka na temelju uzorka koji ne mora nužno biti savršeno reprezentativan.

3.5. Primjer 5 - uporaba statističkih metoda pri poboljšavanju regresijskog modela

Promatranjem utjecaja parametra izrade na svojstva polimernog prototipa urađen je regresijski model pomoću kojeg je opisan utjecaj određenih parametara na mehanička svojstva polimernog prototipa, točnije na njegovu vlačnu čvrstoću R_m i savojnu čvrstoću R_{mf} . [10]

3.5.1 Regresijski model za vlačnu čvrstoću R_m

Originalni regresijski model glasi:

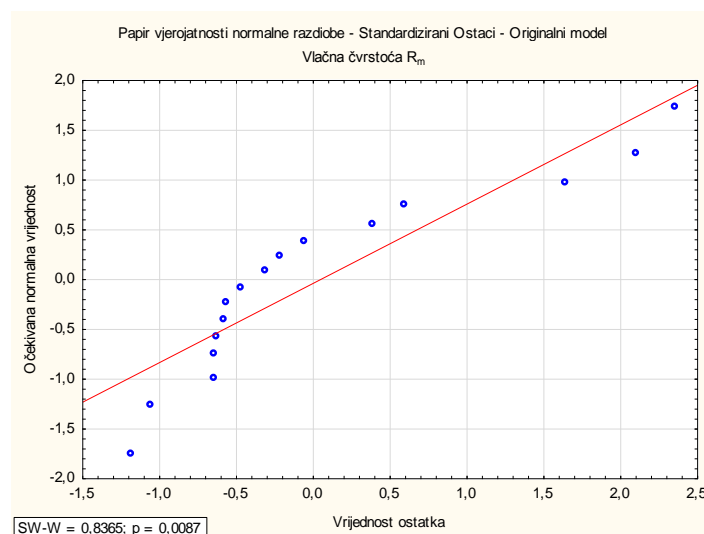
$$R_m = +19,257 + 0,271 \cdot A - 2,579 \cdot 10^{-3} \cdot B - 13,003 \cdot C \quad (3.3.)$$

gdje su varijable A = snaga, B = brzina i C = razmak

Ostaci, odnosno reziduali između stvarne i prediktivne vrijednosti $R_m - a$ su standardizirani i proveden je test normalnosti razdiobe. Dobiveni podaci prikazani su pomoću papira vjerojatnosti normalne razdiobe.

Tablica 17. Originalni regresijski model R_m

Stvarna vrijednost	Prediktivna vrijednost	Ostatak	Standardizirani ostatak
3,76	6,22	-2,46	-0,65
2,12	0,86	1,26	0,387
2,05	3,55	-1,5	-0,465
3,05	4,07	-1,02	-0,311
4,08	6,22	-2,14	-0,566
2,43	0,52	1,91	0,589
3,8	6,22	-2,42	-0,64
3,85	6,22	-2,37	-0,627
19,01	11,7	7,31	2,355
5,12	8,89	-3,77	-1,184
18,56	12,05	6,51	2,098
4	6,22	-2,22	-0,587
3,08	3,23	-0,15	-0,048
5,15	8,5	-3,35	-1,05
1,95	-3,12	5,07	1,648
8,52	9,2	-0,68	-0,214



Slika 37. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka originalnog modela, R_m

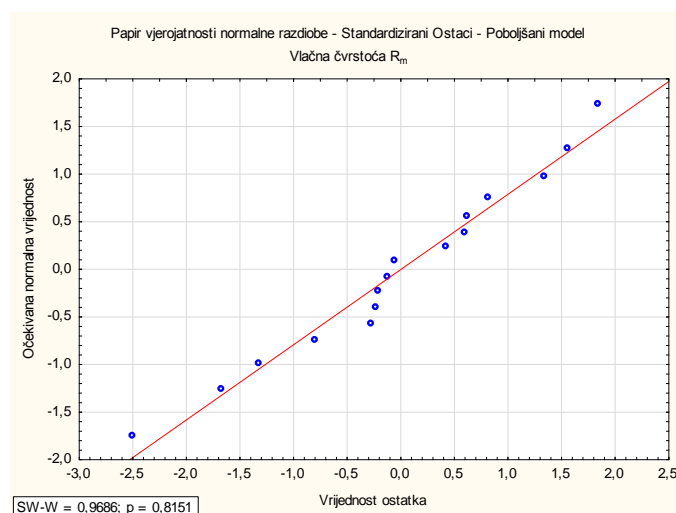
Iz papira vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka originalnog modela i Shapiro – Wilk testa normalnosti vidi se da se ostaci ne rasipaju po normalnoj razdiobi, što znači da ostaci, odnosno razlike između stvarnih i prediktivnih vrijednosti vlačne čvrstoće nisu samo slučajne prirode. Statističkom analizom uzorka i originalnog regresijskog modela izračunat je poboljšani regresijski model koji glasi:

$$R_m = +59,13904 - 1,33036 \cdot A - 0,014218 \cdot B - 48,22163 \cdot C + 7,49568^{-0,04 \cdot A \cdot B} + 18,03923 \cdot C^2 \quad (3.4.)$$

Tablica 18. Poboljšani regresijski model R_m

Stvarna vrijednost	Prediktivna vrijednost	Ostatak	Standardizirani ostatak
3,76	4,17	-0,41	-0,262
2,12	3,76	-1,64	-1,329
2,05	0,99	1,06	0,809
3,05	1,28	1,77	1,559
4,08	4,17	-0,094	-0,06
2,43	3,42	-0,99	-0,8
3,8	4,17	-0,37	-0,236
3,85	4,17	-0,32	-0,205
19,01	17,57	1,44	1,349
5,12	7,36	-2,24	-1,671
18,56	17,91	0,65	0,608
4	4,17	-0,17	-0,11
3,08	0,67	2,41	1,836
5,15	7,45	-2,3	-2,506
1,95	1,57	0,38	0,42
8,52	7,68	0,84	0,631

Analizom standardiziranih ostataka poboljšanog modela dobiveni su sljedeći podaci o distribuciji ostataka:



Slika 38. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih reziduala poboljšanog modela, R_m

Iz papira vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka poboljšanog modela i Shapiro – Wilk testa normalnosti vidi se da se ostaci rasipaju približno po normalnoj razdiobi iz čega se može zaključiti kako su razlike između stvarnih i prediktivnih vrijednosti slučajne prirode, tj. da poboljšani model adekvatno opisuje ovisnost vlačne čvrstoće R_m o parametrima A, B i C.

Usporedbom originalnog i poboljšanog regresijskog modela daje se zaključiti kako se uporabom statističkih metoda uzorkovanja može dobiti poboljšani regresijski model koji kvalitetnije i reprezentativnije prikazuje vrijednosti ovisnost vlačne čvrstoće R_m o parametrima A, B i C od početnog originalnog regresijskog modela. Isto tako iz usporedbe papira vjerojatnosti normalne razdiobe originalnog i poboljšanog modela može se zaključiti kako se ostaci u poboljšanom modelu distribuiraju znatno sličnije normalnoj razdiobi od ostataka originalnog modela što znači da su razlike između predviđenih i stvarnih vrijednosti vlačne čvrstoće u poboljšanom modelu slučajne prirode, tj. da je poboljšani model adekvatan za procjenu vrijednosti vlačne čvrstoće.

3.5.2. Regresijski model za savojnu čvrstoću R_{mf}

Originalni regresijski model glasi:

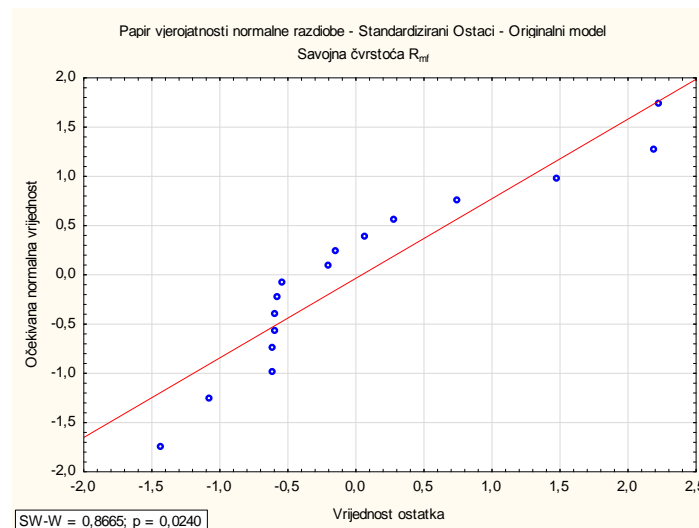
$$R_{mf} = 32,79 + 0,52 \cdot A - 4,13 \cdot 10^{-3} \cdot B - 22,48 \cdot C \quad (3.5.)$$

gdje su varijable A = snaga, B = brzina i C = razmak

Tablica 19. Originalni regresijski model R_{mf}

Transformirana stvarna vrijednost	Transformirana prediktivna vrijednost	Ostatak	Standardizirani ostatak
0,15	11,78	-3,78	-0,609
0,32	2,03	1,53	0,286
0,33	6,54	-3,15	-0,593
0,16	8,33	-0,74	-0,138
0,15	11,78	-3,33	-0,536
0,18	2,52	4,03	0,755
0,15	11,78	-3,55	-0,572
0,15	11,78	-3,66	-0,589
0,043	21,76	11,24	2,202
0,13	17,03	-7,46	-1,425
0,045	21,27	11,4	2,231
0,15	11,78	-3,77	-0,607
0,17	6,9	0,41	0,078
0,13	15,46	-5,58	-1,063
0,35	-4,29	7,49	1,479
0,083	16,67	-1,07	-0,204

Isto kao i u slučaju vlačne čvrstoće, ostaci odnosno reziduali između stvarne i prediktivne vrijednosti $R_{mf} - a$ su standardizirani i proveden je test normalnosti razdiobe. Dobiveni podaci prikazani su pomoću papira vjerojatnosti normalne razdiobe.



Slika 39. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka originalnog modela, R_{mf}

Iz papira vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka originalnog modela i Shapiro – Wilk testa normalnosti vidi se da se ostaci ne rasipaju po normalnoj razdiobi, što znači da ostaci, odnosno razlike između stvarnih i prediktivnih vrijednosti savojne čvrstoće nisu samo slučajne prirode. Statističkom analizom uzorka i originalnog regresijskog modela

izračunat je poboljšani regresijski model s transformiranom izlaznom varijablom izraz 3.6. Važnost same transformacije očituje se u tome da se homogenizira varijanca gledajući po različitim vrijednostima ulaznih parametara (faktora). [6]

$$R_{mf}^{-0,9} = -0,26328 - 1,24539^{-0,04} \cdot A + 1,8257^{-0,04 \cdot B} + 0,32414 \cdot C \quad (3.6.)$$

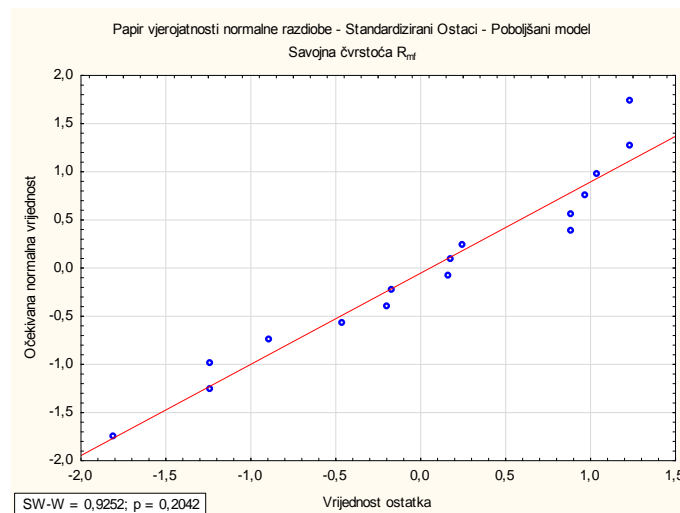
$$- 7,65064^{-0,06 \cdot A \cdot B} - 0,019787 \cdot A \cdot C + 5,67153^{-0,05 \cdot A^2}$$

$$- 1,84555^{-0,08 B^2} + 0,052366 \cdot C^2$$

Tablica 20. Poboljšani regresijski model R_{mf}

Transformirana stvarna vrijednost	Transformirana prediktivna vrijednost	Ostatak	Standardizirani ostatak
0,15	0,15	0,002698	1,037
0,32	0,32	-0,0002303	-0,199
0,33	0,33	0,000256	0,185
0,16	0,16	-0,001248	-0,89
0,15	0,15	-0,004698	-1,806
0,18	0,18	0,001432	1,231
0,15	0,15	-0,001178	-0,453
0,15	0,15	0,0006495	0,25
0,043	0,043	0,0001964	0,171
0,13	0,13	-0,0002351	-0,168
0,043	0,045	-0,001427	-1,236
0,15	0,15	0,002525	0,971
0,17	0,17	-0,0017	-1,234
0,13	0,13	0,001219	0,89
0,35	0,35	0,0000205	0,89
0,084	0,083	0,001721	1,236

Analizom standardiziranih ostataka poboljšanog modela dobiveni su sljedeći podaci o distribuciji ostataka:



Slika 40. Papir vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka poboljšanog modela, R_{mf}

Iz papira vjerojatnosti normalne razdiobe standardiziranih ostataka poboljšanog modela i Shapiro – Wilk testa normalnosti vidi se da se ostaci rasipaju približno po normalnoj razdiobi iz čega se može zaključiti kako su razlike između stvarnih i prediktivnih vrijednosti R_{mf} slučajne prirode, tj. da poboljšani model adekvatno opisuje ovisnost savojne čvrstoće R_{mf} o parametrima A, B i C. Usporedbom originalnog i poboljšanog regresijskog modela daje se zaključiti kako se uporabom statističkih metoda uzorkovanja može dobiti poboljšani regresijski model koji kvalitetnije i reprezentativnije prikazuje vrijednosti ovisnosti savojne čvrstoće R_{mf} o parametrima A, B i C od početnog originalnog regresijskog modela. Isto tako iz usporedbe papira vjerojatnosti normalne razdiobe originalnog i poboljšanog modela može se zaključiti kako se ostaci u poboljšanom modelu distribuiraju znatno sličnije normalnoj razdiobi od ostataka originalnog modela što znači da su razlike između predviđenih i stvarnih vrijednosti savojne čvrstoće slučajne prirode, tj. da je poboljšani model adekvatan za procjenu vrijednosti savojne čvrstoće.

3.6. Primjer 6 - test homogenosti dviju proizvodne serije

Dva stroja proizvode žicu za čelične spajalice nazivnog promjera $d=3,175$ mm s tolerancijom od $\pm 0,0762$ mm. Uzorci veličine $n = 10$ izuzeti su iz proizvedenih zasebnih serija svakoga stroja. Uzorci su izuzimani u isto vrijeme i istoga dana i mjereni su standardnim mikrometrom. Dobiveni podaci su navedeni u tablici 20. [11]

Tablica 21. Promjer d čelične spajalice, mm

Promjer d čelične spajalice, mm	
Stroj 1	Stroj 2
3,16738	3,14706
3,21056	3,14706
3,18008	3,14706
3,18262	3,12674
3,20802	3,10134
3,17754	3,08864
3,18516	3,13182
3,14706	3,11912
3,1369	3,11658
3,19278	3,12166

Pomoću testa hipoteze o razlici očekivanja (t – testa) i usporedbe varijanci (F – testa) provjerit će se da li postoje značajne razlike u očekivanju vrijednosti promjera d kod serija proizvedenih na ova dva stroja i da li su im varijance značajno različite.

Pretpostavljene hipoteze:

$$H_0 \dots \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 \dots \mu_1 \neq \mu_2$$

gdje su μ_1 i μ_2 očekivane vrijednosti šarže stroja 1 i šarže stroja 2.

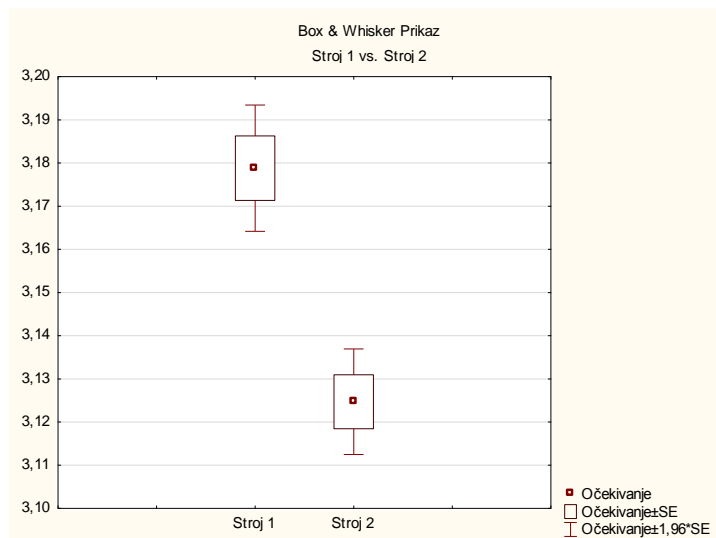
Primjenom t - testa i F – testa na 2 nezavisna uzorka dobiveni su slijedeći podaci:

	t-test nezavisnih uzoraka (Test homogenosti sarzi)										
	Napomena : Varijable su tretirane kao nezavisni uzorci										
	Očekivanje Group 1	Očekivanje Group 2	t-vrijednos	df	p	Veličina uzorka Group 1	Veličina uzorka Group 2	Std.Dev Group 1	Std.Dev Group 2	F-vrijedno Variance:	p Variance:
Uzorak 1 - Uzorak 2											
Stroj 1 vs. Stroj 2	3.17881	3.12470	5.56157	18	0.00002	10	10	0.02359	0.01974	1.42844	0.60381

Slika 41. Prikaz rezultata t - testa i F – testa

Iz F – testa, odnosno usporedbe varijanci dva uzorka vidi se kako se varijanca prve serije *značajno ne razlikuje* od varijance druge serije ($p > 0,05$), odnosno kako 2 serije nemaju značajnu razliku u stupnju disperzije. To potvrđuje i „Box & Whisker“ prikaz podataka (slika 42.) Analizom dobivenih podataka t – testa, („ p “ vrijednost t – testa $< 0,05$), može se zaključiti kako postoje značajne razlike između očekivanja dviju serija. Iako varijance dviju

serija nisu značajno različite, očekivane vrijednosti promjera d čelične spajalice jesu što vodi do zaključka kako ova 2 stroja proizvode nehomogene serije.



Slika 42. „Box – whisker „ prikaz rezultata uzorka 1 i 2

Na temelju rezultata dobivenih iz promatranja i analize uzoraka može se zaključiti kako stroj 2 proizvodi žicu za čelične spajalice koja nije u skladu s nazivnim promjerom d koji je propisan za daljnju proizvodnju čeličnih spajalica. To kasnije može dovesti do situacije odbijanja proizvedene serije žice od kupca jer ne zadovoljava propisane tražene dimenzije. Primjenom principa „Sig sigma“ metodologije; analizom dobivenih rezultata može se poboljšati proizvodni proces te se ukloniti nepotrebni troškovi koji bi nastali u slučaju odbijanja serije žice za spajalice koja je nesukladna s propisanim traženim dimenzijama.

4. Zaključak

U radu je temeljito objašnjen pojam inferencijalne statistike s naglaskom na inženjersku primjenu iste. Također su analizirani najčešći vidovi uporabe metoda inferencijalne statistike koji se mogu pronaći u problemima vezanim za u proizvodne procese i tehnologije.

Objašnjeno je kako se metode inferencijalne statistike uspješno primjenjuju u kontroli kvalitete proizvoda odnosno procesa, te u poboljšanju tehnoloških postupaka. Objašnjena je i povezanost između metoda inferencijalne statistike i „Six sigma“ metodologije. Detaljno su sistematizirane metode koje su obuhvaćane pojmom inferencijalne statistike te su neke od njih primijenjene na realnim primjerima. Analizom dobivenih rezultata može se zaključiti kako je inferencijalna statistika neizostavan alat za analizu dobivenih rezultata temeljenih na uzorku te njihovu kvalitetnu interpretaciju na razini promatranog proizvodnog procesa (osnovnog skupa). U radu se također upućuje na korisnost primjene statističkih metoda pri donošenju zaključaka na temelju uzorka koji ne mora nužno biti savršeno reprezentativan. Provedenom usporedbom regresijskih modela očituje se važnost same transformacije dobivenih podataka u analizi eksperimenata – može se doći do zaključka kako se analizom postojećeg adekvatnog modela može doći do poboljšanog modela koji još kvalitetnije opisuje promatranu korelaciju između određenih pojava (varijabli).

Pisanjem ovog završnog rada došao sam do zaključka kako je uloga inferencijalne statistike te metoda obuhvaćenih pojmom inferencijalne statistike vrlo bitna u analizi i poboljšanju proizvodnih procesa. Budući da se primjenom teorije uzoraka i metoda inferencijalne statistike znatno smanjuju troškovi analize proizvodnih procesa i vremena dobivanja izlaznih rezultata, smatram da će njihova primjena i u budućnosti biti neizostavna u inženjerstvu.

5. Literatura:

1. Šošić, I., *Primijenjena statistika*, 2004.
2. Montgomery, D.C., Ringer, G.C., *Applied statistics and probability for engineers*, 2003.
3. Predavanja, kolegij: Kontrola kvalitete, prof.dr.sc. Vedran Mudronja, Fakultet strojarstva i brodogradnje
4. Predavanja, kolegij: Inženjerska statistika, doc.dr.sc. Hrvoje Cajner
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Shapiro%E2%80%93Wilk_test 14.2.2013.
6. Cajner, Hrvoje; Tonković, Zlatko; Šakić, Nikola: *The significance of data transformation in analysis of experiments*, 12th International Scientific Conference on Production Engineering CIM2009
7. Doktorski rad: Žmak, Irena: *Modeliranje strukture i svojstva nodularnog lijeva neuronskim mrežama*, Zagreb, 2009.
8. Doktorski rad: Čanžar, Predrag: *Eksperimentalno i numeričko modeliranje zamornog ponašanja nodularnog lijeva*, Zagreb, 2012.
9. Doktorski rad: Šolić, Sanja: *Utjecaj mikrostrukture brzoreznog čelika na tribološka svojstva reznih alata*, Zagreb, 2010.
10. Doktorski rad: Pilipović, Ana: *Utjecaj parametara izrade na svojstva polimernog prototipa*, Zagreb, 2012.

NAPOMENA: Analiza podataka u primjeni metoda inferencijalne statistike na realnim primjerima rađena je u programskom paketu *Statistica* u periodu do rujna 2012. godine